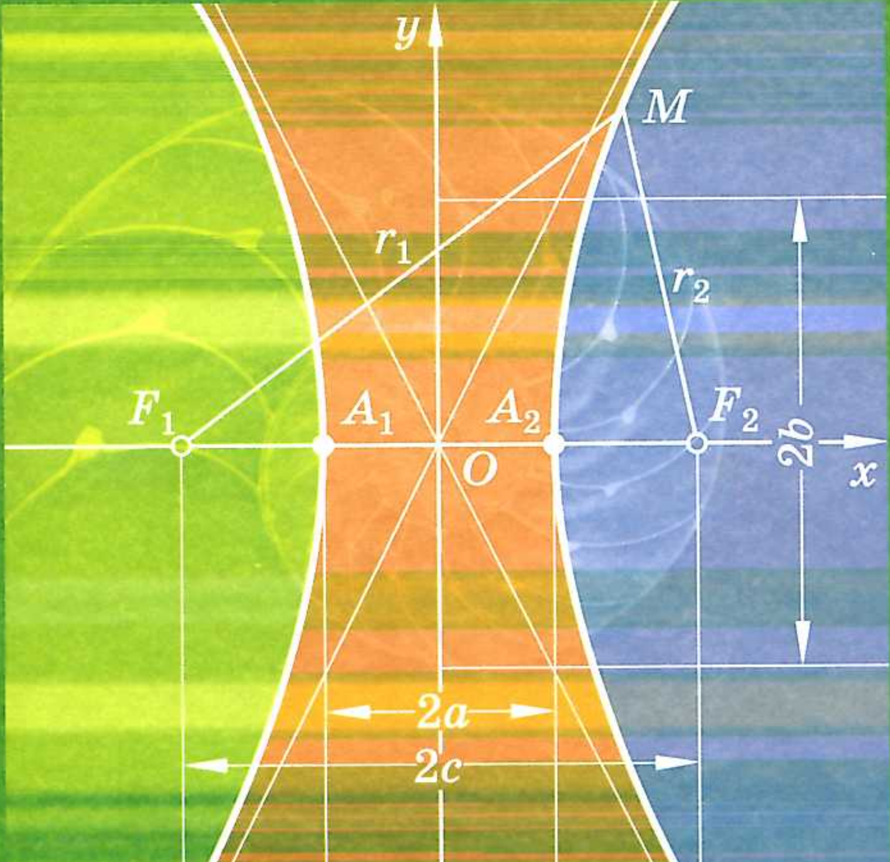
МАТЕМАТИКА

Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко



СРЕДНЕЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебника для использования
в учебном процессе образовательных учреждений,
реализующих программы
среднего профессионального образования

7-е издание, стереотипное

СРЕДНЕЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

Москва
ДРОФА
2010

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Б74

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, проф.
И. И. Баврин
(Московский государственный педагогический университет);
А. Н. Рубцова
(Санкт-Петербургский технический колледж управления
и коммерции)

Богомолов, Н. В.
Б74 Математика : учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 7-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2010. — 395, [5] с. : ил.
ISBN 978-5-358-08334-9

В учебнике рассмотрены основные разделы математики, охватываемые действующими программами для техникумов: алгебра, начала анализа, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, аналитическая геометрия на плоскости, стереометрия, элементы теории вероятностей и математической статистики. Приведено большое количество примеров с решениями. Издание является одной из книг учебного комплекта, в который также входят «Сборник задач по математике» Н. В. Богомолова и «Сборник дидактических заданий по математике» Н. В. Богомолова и Л. Ю. Сергиенко.

Для студентов техникумов гуманитарного направления, финансово-экономических, технических, строительных, сельскохозяйственных. Может быть использован школьниками старших классов общеобразовательных школ, слушателями курсов по подготовке в вузы и учителями школ.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-358-08334-9

Предисловие к первому изданию

Настоящее издание представляет собой **учебник по математике** для учащихся техникумов и является одной из книг учебного комплекта, в который также входят **«Сборник задач по математике»** Н. В. Богомолова и **«Сборник дидактических заданий по математике»** Н. В. Богомолова и Л. Ю. Сергиенко. Материал, изложенный в книге, соответствует действующим программам для техникумов как гуманитарного направления, так и финансово-экономических, технических и строительных.

Учебник охватывает материал, относящийся к алгебре, началам анализа, дифференциальному и интегральному исчислениям, дифференциальным уравнениям, аналитической геометрии на плоскости, стереометрии, а также элементам теории вероятностей и математической статистики.

В книге приведено большое количество тщательно подобранных примеров, снабженных решениями. К каждой теме прилагается блок вопросов, позволяющих проконтролировать понимание теоретических положений, определений и доказательств.

Учебник с успехом можно использовать как при занятиях под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы. Он также полезен школьникам старших классов общеобразовательных школ, слушателям курсов по подготовке в вузы и учителям школ.

Математические обозначения

$=$ равно
$\neq$ не равно
$\approx$ приближенно равно
$<$ меньше
$>$ больше
$\leqslant$ меньше или равно
$\geqslant$ больше или равно
$|a|$ абсолютная величина числа a
$+$ (плюс) сложение
$-$ (минус) вычитание
$\cdot$ умножение, например, $a \cdot b$ или ab (знак умножения часто опускается)
$:$ или –, или / —деление, например, $a : b$, или $\frac{a}{b}$, или a/b
a^m a в степени m
$\sqrt{}$ квадратный корень
i квадратный корень из -1; $i = \sqrt{-1}$
$\sqrt[m]{}$ корень степени m при $m \neq 2$
$\log_b$ логарифм при основании b. Если нет необходимости указывать основание, то пишут log
lg логарифм при основании 10 (обыкновенный или десятичный логарифм)
ln логарифм при основании $e = 2{,}71828...$ (натуральный логарифм)
( ), [ ], { } скобки
$n!$ факториал; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
$\perp$ перпендикулярно
$\parallel$ параллельно
$\backsim$ подобно
AB отрезок прямой между точками A и B
Δ треугольник: $\Delta\, ABC$
$\angle$ плоский угол
$\cup$ дуга: $\cup AB$
$^\circ$ градус
$'$ минута
$''$ секунда

(градус, минута, секунда) — при обозначении величины плоского угла или дуги

Если обозначение ° (градус), ′ (минута) или ″ (секунда) относится к числу, содержащему десятичную дробь, то оно ставится над запятой, например, 6°5′, 27; 8°4′2″,9.

При обозначении угла отвлеченным числом подразумевается, что это число есть отношение данного угла к радиану; радиан есть центральный угол, длина дуги которого равна радиусу; радиан = = 57°,29578...

π отношение длины окружности к диаметру

sin синус

cos косинус

tg тангенс

ctg котангенс

sec секанс

cosec косеканс

arcsin арксинус ($y = \arcsin x$; y есть дуга, синус которой равен x)

arccos арккосинус

arctg арктангенс

arcctg арккотангенс

Для обозначения степени функции показатель степени ставится при знаке функции; например, $\sin^2 x$ (синус квадрат икс) есть $(\sin x)^2$.

$a, b, c, \ldots$ постоянные величины (применяются преимущественно первые буквы латинского алфавита)

$x, y, z, u, \ldots$ переменные величины (применяются преимущественно последние буквы латинского алфавита)

$f(\ ), \varphi(\ ), F(\ ), \Phi(\ ), \ldots$ функции одного аргумента; например, $f(x)$

∞ бесконечность

lim предел

$\rightarrow$ стремится, например, $x \rightarrow a$, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

Δ приращение (греческая прописная буква дельта)

d дифференциал

′ ″ обозначения первой и второй производных, например, $f'(x)$, $f''(x)$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ первая производная одного переменного; например, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Σ сумма, например, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$\int$ интеграл

$\int\limits_a^b$ определенный интеграл с нижним пределом a и верхним пределом b

$\bar{z}$ комплексное число, сопряженное с z, например, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$ число сочетаний из n элементов по m

$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)] = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ число размещений из n элементов по m

$P_n = n!$ число перестановок из n элементов

$\Big|_a^b$ знак двойной подстановки; например, $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$\in$ принадлежит; например, $a \in \boldsymbol{A}$ — элемент a принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$

$\subset$ содержится; например, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, множество $\boldsymbol{N}$ содержится в множестве $\boldsymbol{Z}$

$\vec{a}$ вектор

$\overrightarrow{AB}$ вектор, начало которого в точке A, конец в точке B

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ единичные векторы осей прямоугольной системы координат

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\end{array}\right\}$$ равенство, сложение (сумма), вычитание (разность) векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ скалярное произведение векторов a и b

$\boldsymbol{N}$ множество натуральных чисел

$\boldsymbol{Z}$ множество целых чисел

$\boldsymbol{Q}$ множество рациональных чисел

$\boldsymbol{I}$ множество иррациональных чисел

$\boldsymbol{R}$ множество действительных (вещественных) чисел

$\boldsymbol{C}$ множество комплексных чисел

$[a; b]$ замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b

$(a; b)$ открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b

$(a; b]$, $[a; b)$ полуоткрытые промежутки с началом a и концом b

$\Leftrightarrow$ если $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$ и наоборот

$\Rightarrow$ если $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$

Латинский алфавит

Aa	—	а
Bb	—	бэ
Cc	—	цэ
Dd	—	дэ
Ee	—	е
Ff	—	эф
Gg	—	ге (же)
Hh	—	ха (аш)
Ii	—	и
Jj	—	йот (жи)
Kk	—	ка
Ll	—	эль
Mm	—	эм
Nn	—	эн
Oo	—	о
Pp	—	пэ
Qq	—	ку
Rr	—	эр
Ss	—	эс
Tt	—	тэ
Uu	—	у
Vv	—	вэ
Ww	—	дубль-вэ
Xx	—	икс
Yy	—	игрек
Zz	—	зэт

Греческий алфавит

Αα	—	альфа
Ββ	—	бэта
Γγ	—	гамма
Δδ	—	дельта
Εε	—	эпсилон
Ζζ	—	дзэта
Ηη	—	эта
Θϑθ	—	тэта
Ιι	—	йота
Κκ	—	каппа
Λλ	—	лямбда
Μμ	—	мю
Νν	—	ню
Ξξ	—	кси
Οο	—	омикрон
Ππ	—	пи
Ρρ	—	ро
Σσ	—	сигма
Ττ	—	тау
Φφ	—	фи
Χχ	—	хи
Υυ	—	ипсилон
Ψψ	—	пси
Ωω	—	омега

ЧАСТЬ I. АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ГЛАВА I. Линейные и квадратные уравнения и неравенства. Элементы вычислительной математики

§ 1. Рациональные числа. Иррациональные числа. Понятие о мнимых и комплексных числах

1. Натуральные числа. Одним из основных понятий математики является понятие ***чи́сла́***. Исторически первыми возникли в практике и были введены в науку ***натуральные числа***.

Натуральные числа используют в связи со счетом количества отдельных предметов, например при подсчете количества книг на полке, количества деталей, изготовленных за смену, и т. д.

Натуральные числа образуют бесконечное множество, которое принято обозначать через $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

2. Дробные числа. Для практических целей натуральных чисел оказалось недостаточно, в частности при делении чисел, при измерении длин отрезков и различных физических величин возникла необходимость расширения множества целых чисел введением долей единицы и количества этих долей.

Например, если некоторая величина разделена на n частей и взято m таких частей, то вводится новое так называемое ***дробное*** число $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

3. Отрицательные числа. Практическая потребность привела к введению отрицательных чисел, чтобы иметь возможность измерять величины, способные изменяться в двух противоположных направлениях от выбранной точки отсчета. Например, при измерении сил, действующих на пружину, растягивающие пружину силы можно считать положительными, а сжимающие пружину — отрицательными.

Таким образом, каждому числу, натуральному или дробному, сопоставляется ***отрицательное число***. Если число (положительное) обозначать буквой a (или $+a$), то соответствующее ему ***противоположное*** (отрицательное) число записывается как $-a$.

К этим числам присоединяется число 0, соответствующее началу отсчета как положительных, так и отрицательных чисел.

4. Множество целых чисел. Натуральные числа, им противоположные (отрицательные) и число 0 составляют множество ***Z целых чисел***.

Целые числа могут быть записаны в виде дробей, например $4 = \frac{4}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$.

5. Множество рациональных чисел. Множество, состоящее из положительных и отрицательных целых и дробных чисел и числа 0, называется множеством ***рациональных чисел***. Обозначим его через $\boldsymbol{Q}$. Таким образом, всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — любое целое число, а n — натуральное число.

Следовательно, $\boldsymbol{N}$ содержится в $\boldsymbol{Z}$, а $\boldsymbol{Z}$ в $\boldsymbol{Q}$. Символически это записывается следующим образом: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$. Знак $\subset$ обозначает включение или принадлежность одного множества другому.

Другими словами, $\boldsymbol{Z}$ есть расширенное множество $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ — расширенное множество $\boldsymbol{Z}$, и, таким образом, $\boldsymbol{Q}$ является расширенным множеством $\boldsymbol{N}$.

6. Основные законы действий над рациональными числами. Укажем основные законы действий над рациональными числами и некоторые отношения между ними. Основными действиями над числами являются сложение и умножение, а основным отношением между ними является сравнение чисел, т. е. установление того, какое из двух чисел больше (меньше), если такое сравнение возможно.

I. Переместительный или коммутативный закон сложения:

$$a + b = b + a.$$

II. Сочетательный или ассоциативный закон сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

III. Сложение рационального числа с нулем:

$$a + 0 = a.$$

IV. **Сложение рационального числа с соответствующим ему числом противоположного знака:**

$$a + (-a) = 0.$$

V. **Переместительный или коммутативный закон умножения:**

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

VI. **Сочетательный или ассоциативный закон умножения:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c).$$

VII. **Умножение рационального числа на единицу:**

$$a \cdot 1 = a.$$

VIII. **Умножение не равного нулю рационального числа на число, равное отношению единицы к этому числу** (такие числа a и $\frac{1}{a}$ называются взаимно обратными):

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \text{ для } a \neq 0.$$

IX. **Распределительный, или дистрибутивный, закон умножения относительно сложения:**

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Введем знак $\Rightarrow$. Запись **A** $\Rightarrow$ **B** обозначает, что из **A** следует **B**.

X. **Свойство транзитивности:**

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c.$$

XI. **Правило сложения неравенств:** для любого числа c

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

XII. **Правило умножения неравенств на число, отличное от нуля:**

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \text{ при } c > 0,$$
$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \text{ при } c < 0.$$

7. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Любое положительное и отрицательное целое число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем, равным единице, например, $3 = \frac{3}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$.

Число 0 можно представить в виде обыкновенной дроби с числителем, равным нулю: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} \ldots$.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, например, $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{7}{35}$; $-\frac{1}{2} = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{4}$.

Если знаменатель обыкновенной дроби есть степень числа 10, то эту дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Например, $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{197}{100} = 1{,}97$; $\frac{187}{1000} = 0{,}187$; $-\frac{3}{10} = -0{,}3$; $-\frac{13}{10} = -1{,}3$.

Если знаменатель обыкновенной дроби содержит в себе какие-либо простые множители, отличающиеся от 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то такая дробь не обращается в десятичную.

Подобные дроби можно обращать лишь в приближенные десятичные: $\frac{11}{21} = \frac{11}{3 \cdot 7} = 0{,}52389...$; $\frac{17}{63} = \frac{17}{3^2 \cdot 7} = 0{,}2648...$.

8. Периодические дроби. Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например, $\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{7}$.

Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью, а совокупность повторяющихся цифр называется периодом этой дроби.

Периодические дроби бывают ***чистыми*** и ***смешанными***. ***Чистой*** периодической дробью называется дробь, у которой период начинается сразу же после запятой, например, 3,171717... . ***Смешанной*** называется дробь, у которой между запятой и первым периодом есть одна или несколько неповторяющихся цифр, например, 0,231919... .

Периодические дроби сокращенно записывают следующим образом: 3,171717... — 3(17); 0,231919... — 0,23(19), т. е. период дроби заключают в скобки. Например, число 3,(17) читается: три целых и 17 в периоде.

Бесконечная десятичная дробь, получающаяся при обращении обыкновенной дроби, должна быть периодической.

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной периодической десятичной дроби.

Например, рациональное число $\frac{7}{11}$ делением 7 на 11 можно представить периодической десятичной дробью 0,(63).

Конечные десятичные дроби можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей:

$$0{,}27 = 0{,}27000\ldots = 0{,}27(0); -4{,}73 = -4{,}73000\ldots = -4{,}73(0).$$

Целые числа также можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей:

$$17 = 17{,}000\ldots = 17(0); -8 = -8{,}000\ldots = -8(0).$$

Можно утверждать, что каждое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Верно и обратное утверждение.

Любая бесконечная периодическая дробь является рациональным числом.

9. Обращение чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную. Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения не содержит множителей 2 и 5, обращается в чистую периодическую десятичную дробь.

Чтобы обратить чистую периодическую десятичную дробь в обыкновенную, нужно ее период сделать числителем, а в знаменателе записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например,

$$0{,}(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};\ 3{,}05 = 3\frac{5}{99};\ 0{,}(057) = \frac{57}{999} = \frac{19}{333}.$$

10. Обращение смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную. Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения вместе с другими множителями содержит множители 2 или 5 или оба множителя, обращается в смешанную периодическую дробь. Например,

$$\frac{16}{30} = \frac{8}{15} = 0{,}5(3);\ \frac{5}{6} = 0{,}8(3);\ \frac{1}{70} = 0{,}0(142857);\ \frac{17}{18} = 0{,}9(4).$$

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

Например,

$$0{,}5(3) = \frac{53 - 5}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15};$$

$$0{,}8(3) = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6};$$

$$0{,}0(142857) = \frac{142857 - 0}{9999990} = \frac{142857}{9999990} = \frac{1}{70};$$

$$0{,}9(4) = \frac{94 - 9}{90} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18};$$

$$0{,}3(45) = \frac{345 - 3}{990} = \frac{342}{990} = \frac{19}{55}.$$

Исключение составляют бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9. Например:

$$0{,}6(9) = \frac{69 - 6}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0{,}7;$$

$$0{,}76(9) = \frac{769 - 76}{900} = \frac{693}{900} = \frac{77}{100} = 0{,}77.$$

Любая бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9 равна некоторой конечной десятичной дроби, поэтому при представлении рациональных чисел десятичными дробями необходимо исключить из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9.

11. Иррациональные числа. Потребности логического развития математики и ее практических приложений показали недостаточность множества рациональных чисел для решения многих задач.

Покажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Задача сводится к решению уравнения $x^2 = 2$. Очевидно, что не существует такого целого числа, квадрат которого равен 2, ибо $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$.

Допустим, что такое число найдется среди дробных чисел, поэтому будем считать, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима, т. е. числа m и n взаимно простые. Предположим, что имеет место равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, тогда $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что натуральное число m^2 — четное, так как $2n^2$ — число четное. Если m^2 — четное, то и m — четное, т. е. $m = 2p$, где p — натуральное число. Имеем: $(2p)^2 = 2n^2$ или $4p^2 = 2n^2$, $2p^2 = n^2$, т. е. число n^2 также четное, отсюда следует, что и n — четное.

Приходим к выводу, что числа m и n четные, т. е. не являются взаимно простыми. Это противоречит первоначальному предположению, что m и n — взаимно простые. Следовательно, не существует такого дробного числа, квадрат которого равен 2.

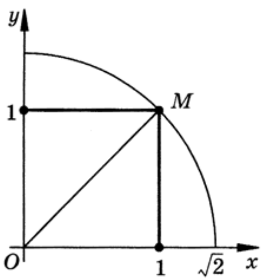


Рис. 1

Из доказанного вытекает, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, т. е. не имеет общей меры со стороной квадрата, равной 1 (рис. 1). Такой вывод противоречит нашему интуитивному представлению о том, что любой отрезок имеет длину. Длина диагонали квадрата со стороной, равной единице, не может быть выражена рациональным числом*.

На числовой оси при принятой единице измерения всякому рациональному числу соответствует одна и только одна точка.

Если каждую из этих рациональных точек представить непрозрачными (черными), а все другие точки прозрачными, то на числовой оси образуется множество просветов, которые будут соответствовать числам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и множеству других чисел, не являющихся рациональными. В отличие от рациональных чисел эти числа называются ***иррациональными***. Таким образом, числовая ось полностью заполняется точками, соответствующими рациональным и иррациональным числам, и просветов на числовой оси не будет.

---

* Данное открытие приписывают греческому философу *Пифагору* [Πυθαγορας], жившему около 2500 лет тому назад. Не исключено, что сведения о существовании несоизмеримых отрезков восходят к глубинам ассиро-вавилонской культуры.

Иррациональные числа представляют собой множество $\boldsymbol{I}$ всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

Иррациональное число больше всякого приближения по недостатку и меньше всякого приближения по избытку. Приведем примеры иррациональных чисел:

$\sqrt{2} = 1{,}4142136...$ $(1{,}414213 < \sqrt{2} < 1{,}414214)$,

$\pi = 3{,}141592653589...$,

$e = 2{,}718281828459045...$ (e — основание натуральных логарифмов),

$\lg 5 = 0{,}6989700...$.

12. Действительные числа. Множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел и множество $\boldsymbol{I}$ всех иррациональных чисел называется множеством $\boldsymbol{R}$ ***действительных*** или ***вещественных*** чисел, т. е. $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$. Другими словами, действительным числом называется конечная или бесконечная десятичная дробь.

Множество действительных чисел обладает всеми свойствами I—XII множества рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ (см. п. 6). Множество неотрицательных действительных чисел обозначают $\boldsymbol{R}_+$, а множество отрицательных действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}_-$.

Множество называется ***конечным***, если оно состоит из конечного числа элементов, в противном случае оно называется ***бесконечным***.

Множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел называют ***числовой прямой***, а сами действительные числа — ***точками числовой прямой***.

Наиболее часто встречаются следующие числовые множества: ***замкнутый промежуток*** (или ***отрезок***) с началом a и концом b

$$[a; b] \text{ или } a \leqslant x \leqslant b;$$

открытый промежуток (или ***интервал***) с началом a и концом b (точки a и b не включаются):

$$(a, b) \text{ или } a < x < b;$$

полуоткрытые промежутки с началом a и концом b:

$$(a, b] \text{ или } a < x \leqslant b \text{ и}$$
$$[a, b) \text{ или } a \leqslant x < b,$$

число $b - a$ называется длиной промежутка с концами a и b;

бесконечные промежутки (лучи, полупрямые)

$$(a, +\infty) \text{ или } a < x < +\infty,$$
$$(-\infty, a) \text{ или } -\infty < x < a,$$
$$[a, +\infty) \text{ или } a \leqslant x < +\infty,$$
$$(-\infty, a] \text{ или } -\infty < x \leqslant a;$$

числовая прямая

$$(-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R} \text{ или } -\infty < x < +\infty.$$

13. Абсолютная величина (модуль) действительного числа. Под ***абсолютной величиной (модулем)*** действительного числа a понимают его величину, взятую без знака. Поэтому следует отличать абсолютную величину действительного числа от его алгебраической величины, которая всегда записывается или представляется мысленно со знаком. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Например, $|+5| = 5$, $|-3| = 3$, $|\pm 0| = 0$.

Каждому положительному действительному числу a соответствует отрицательное действительное число $-a$.

По определению абсолютная величина (модуль) числа $|a|$ равна самому числу a, если a — положительное число, или числу $-a$, если a — отрицательное число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Абсолютная величина нуля равна нулю.

Например,

$$|4| = 4; \; |-4| = -(-4) = 4.$$

Из определения абсолютной величины следует:

$$|a| \geqslant 0; \; |-a| = |a|; \; a \leqslant |a|.$$

Например, если $|a| > 10$, то $a > 10$ или $a < -10$.

14. Деление на нуль. Деление на нуль всегда является недопустимым действием.

1) Выражение $\frac{0}{0}$ — неопределенность, так как $\frac{0}{0}$ выражает собой любое число m $\left(\frac{0}{0} = m; \; 0 = 0 \cdot m = 0\right)$.

2) Выражение $\frac{a}{0}$ не имеет смысла. Пусть $\frac{a}{0} = m$, $a = 0 \cdot m = 0$, но $a \neq 0$. Нет такого числа m, которое, будучи помноженным на нуль, дало бы число, отличное от нуля.

Следовательно, обе формы $\frac{0}{0}$ и $\frac{a}{0}$ являются только ***кажущимися математическими формулами***: первая бесполезна, вторая бессмысленна.

Нуль есть число нейтральное, оно не является ни положительным, ни отрицательным, а является лишь границей положительных и отрицательных чисел.

15. Понятие о мнимых и комплексных числах. Для решения многих задач физики, электротехники и других наук оказалось недостаточно множества действительных чисел.

Приведем следующий пример. Для уравнения $x^2 + 1 = 0$ формально $x = \pm\sqrt{-1}$, т. е. это уравнение в множестве действительных чисел решения не имеет, так как не существует действительного числа, квадрат которого равен -1.

В связи с этим возникла потребность нового расширения понятия числа. ***Ко́мплексными числами*** называются числа вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется ***мнимой единицей****.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа. Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z = a + bi$, а bi — его мнимой частью.

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел, его можно представить в виде $a = a + 0 \cdot i$. Числа 0, 1 и i записываются соответственно в виде $0 = 0 + 0 \cdot i$, в этом случае комплексное число 0 совпадает с числом 0 множества действительных чисел, $1 = 1 + 0 \cdot i$ и $i = 0 + 1 \cdot i$. При $a = 0$ комплексное число $a + bi$ обращается в чисто мнимое число bi.

Два комплексных числа называются ***взаимно сопряженными*** (обозначаются z и $\bar{z}$), если их действительные части равны, а мни-

---

* Еще в XVI в. итальянские математики *Джероламо Карда́но* [*Cardano*] (1501—1576) и *Раффаэле Бомбе́лли* [*Bombelli*] (ок. 1526—1572) допускали существование квадратных корней из отрицательных чисел и ввели символ $\sqrt{-1}$. Символ i был введен академиком Петербургской академии наук *Леонардом Эйлером* [*Euler*] (1707—1783). Термин же «комплексное число» был предложен немецким математиком *Карлом Гауссом* [*Gauß*] (1777—1855).

мые отличаются знаками. Например, числу $z = -3 + 5i$ сопряженным будет число $\bar{z} = -3 - 5i$, числу $z = 5 - 7i$ сопряженным будет число $\bar{z} = 5 + 7i$. При решении квадратного уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$ получаем два взаимно сопряженных корня $x_1 = 1 - i\sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + i\sqrt{2}$.

Комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются ***противоположными.***

Множество комплексных чисел обозначается буквой $\boldsymbol{C}$. Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ содержится в множестве $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$, следовательно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

16. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой плоскости с координатами $(a; b)$. Плоскость xOy, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью (рис. 2). При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют действительной осью, а чисто мнимые числа — точками оси ординат, которую называют мнимой осью.

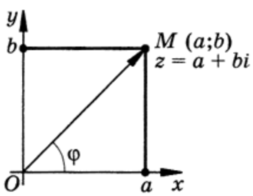


Рис. 2

Любое комплексное число $z = a + bi$ единственным способом определяется его действительной и мнимой частями. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ в комплексной плоскости соответствует единственная точка $M(a; b)$, и, обратно, каждой точке $(a; b)$ плоскости xOy соответствует единственное комплексное число. Например, число $z = 3 + 2i$ изображается точкой с абсциссой 3 и ординатой 2 (рис. 3). Число $z = 0 + 3i$ изобразится с точкой (0; 3) на оси ординат, которую мы условились называть мнимой осью (рис. 4). Сопряженные числа $z = 2 + i$ и $\bar{z} = 2 - i$ расположены симметрично относительно действительной оси (рис. 5).

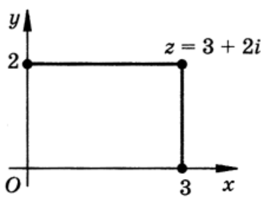


Рис. 3

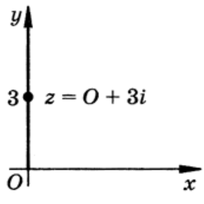


Рис. 4

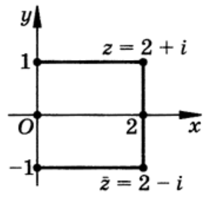


Рис. 5

Таким образом, между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости x_0y существует взаимно-однозначное соответствие. Каждому действительному числу $z = a + 0 \cdot i$ соответствует точка $(a; 0)$ на оси абсцисс, и всякому мнимому числу $z = 0 + bi$ соответствует точка $(0; b)$ на оси ординат. Числу $z = i$ соответствует точка $(0; 1)$.

Комплексное число $z = a + b \cdot i$ можно геометрически изобразить в виде вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$ с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $M(a; b)$. Следовательно, каждой точке $M(a; b)$ будет соответствовать один и только один вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 2).

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется действительное число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. В геометрической интерпретации модуль — это длина радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$: $|\overrightarrow{OM}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Число r может быть либо положительным, либо равным нулю при $a = 0$ и $b = 0$.

Модуль комплексного числа называется также абсолютной величиной этого числа. При $b = 0$ имеем $|a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$, т. е. модуль действительного числа есть абсолютная величина этого числа.

♦ ПРИМЕР

Найти модули комплексных чисел $z_1 = 4 + 3i$; $z_2 = -1 - 2i$.

РЕШЕНИЕ.

$$|z_1| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$
$$|z_2| = |-1 - 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 2), отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z = a + bi$. Если отсчет ведется против движения числовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки — отрицательной. Для числа $z = 0$ аргумент не определен.

Из геометрической интерпретации комплексных чисел вытекают следующие свойства:

I. **Длина вектора $\vec{z}$ равна $|\vec{z}|$.**
II. **Точки $z = a + bi$ и $z = a - bi$ симметричны относительно действительной оси.**
III. **Точки z и $-z$ симметричны относительно точки O.**
IV. **Число $z_1 + z_2$ геометрически изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов (правилу параллелограмма), соответствующих точкам z_1 и z_2 (рис. 6).**
V. **Расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$.**

17. Сложение и вычитание комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Действия над комплексными числами удовлетворяют основным законам действий над рациональными числами I—IX (см. п. 6). Законы действий X—XII к комплексным числам не применимы. Между комплексными числами не существует понятий «больше» или «меньше».

Сложение двух комплексных чисел выполняется по формуле

$$\boxed{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.}$$

Например, суммой двух комплексных чисел $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = -5 + 3i$ является $z = z_1 + z_2 = (3 - 5) + (4 + 3)i = -2 + 7i$.

Сумма двух сопряженных комплексных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ равна $z + \bar{z} = 2a$.

Представим геометрически сумму двух комплексных чисел $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 4 + i$. Числу $z_1 = 1 + 2i$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу $z_2 = 4 + i$ — вектор $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 7). Суммой этих векторов является вектор $\overrightarrow{OM}$, представляющий собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$.

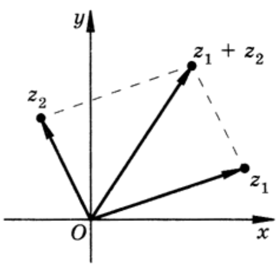


Рис. 6

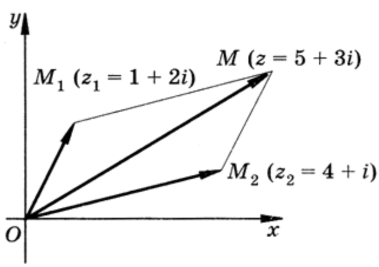


Рис. 7

Вычитание двух комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению. Разность двух комплексных чисел находится по формуле

$$\boxed{(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.}$$

Например, разность двух комплексных чисел $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = -3 + 5i$ равна

$$z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (-3 + 5i) = (4 + 3) + (-3 - 5)i = 7 - 8i.$$

Разность двух сопряженных комплексных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ равна $a + bi - a + bi = 2bi$.

18. Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Умножение двух комплексных чисел выполняется по формуле:

$$\boxed{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.}$$

Правило умножения распространяется и на большее число сомножителей.

♦ ПРИМЕР

Найти произведение комплексных чисел: 1) $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 - i$; 2) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + 4i$ и $z_3 = 2 - i$.

РЕШЕНИЕ. 1) $z_1 \cdot z_2 = (2(-1) - 3(-1)) + (2(-1) + (-1)3)i = (-2 + 3) + (-2 - 3)i = 1 - 5i$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8i^2 = 3 + 10i + 8 = 11 + 10i$;

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (11 + 10i)(2 - i) = 22 - 11i + 20i - 10i^2 = 22 + 9i - 10 = 32 + 9i$.

Приведем соотношение, представляющее собой интересную зависимость в области действительных чисел. Пусть даны два произведения с комплексными числами:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i, \qquad (\alpha)$$

$$(a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \qquad (\beta)$$

Перемножив левые и правые части равенств (α) и (β), получим:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Последнее равенство содержит только действительные числа, из чего следует, что при умножении двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, получается произведение, представляющее собой также сумму двух квадратов.

Рассмотрим примеры:

$(1 + 9)(4 + 25) = 10 \cdot 29 = 290 = 1^2 + 17^2$,

$(1 + 4)(9 + 25) = 5 \cdot 34 = 170 = 1^2 + 13^2$,

$(1 + 25)(9 + 16) = 26 \cdot 25 = 650 = 5^2 + 25^2$.

При перемножении сопряженных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ получим $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = r^2$, где r — модуль каждого из сомножителей. Итак, произведение двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным r^2, т. е. квадрату их общего модуля.

Равенство

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) \qquad (1.1)$$

показывает, что сумму квадратов двух действительных чисел можно разложить на комплексные множители. Это разложение на множители невыполнимо в множестве действительных чисел.

♦ ПРИМЕР

Используя формулу (1.1), разложить на комплексные множители: 1) $4m^2 + 9n^2$; 2) $a + b$; 3) $2 + \sqrt{5}$; 4) 5.

РЕШЕНИЕ.

1) $4m^2 + 9n^2 = (2m)^2 + (3n)^2 = (2m + 3ni)(2m - 3ni)$;

2) $a + b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$;

3) $2 + \sqrt{5} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt[4]{5})^2 = (\sqrt{2} + i\sqrt[4]{5})(\sqrt{2} - i\sqrt[4]{5})$;

4) $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2 = (1 + 2i)(1 - 2i)$.

19. Деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Деление комплексных чисел рассматривается как действие, обратное умножению, и производится по формуле

$$\boxed{\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.}$$

Поясним предыдущую формулу. Умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2i^2}{a_2^2-b_2^2i^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

♦ ПРИМЕР

Найти частное от деления числа $z_1 = 3 + 4i$ на число $z_2 = 2 - 3i$.

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{6+9i+8i+12i^2}{4-9i^2}=\frac{6+17i-12}{4+9}=$$
$$=\frac{-6}{13}+\frac{17}{13}i=-\frac{6}{13}+\frac{17}{13}i.$$

20. Возведение комплексных чисел в степень. Возведение комплексного числа $z = a + bi$ в степень n ($n \in N$) будем рассматривать как частный случай умножения комплексных чисел:

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z.$$

Найдем натуральные степени мнимой единицы i:

$$i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1,\ i^5=i^4\cdot i=i,\ i^6=$$
$$=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1,\ i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-1)=-i,\ i^8=i^4\cdot i^4=1.$$

Учитывая, что $i^4 = 1$, имеем $i^{4n+1} = i \cdot i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, где $n \in N$.

♦ ПРИМЕР 1

Вычислить i^{55}.

РЕШЕНИЕ. При делении числа 55 на 4 имеем: $55 = 52 + 3 = 13 \cdot 4 + 3$, поэтому $i^{55} = i^{13\cdot 4+3} = 1 \cdot i^3 = -i$.

♦ ПРИМЕР 2

Вычислить: 1) $z_1 = (1 + i)^2$, 2) $z_2 = (1 + i)^3$, 3) $z_3 = (1 + i)^4$, 4) $z_4 = (3 - 2i)^2$, 5) $z_5 = (1 + i)^{17}$, 6) $z_6 = (1 - i)^{-3}$.

РЕШЕНИЕ.

1) $z_1 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$;

2) $z_2 = (1 + i)^2(1 + i) = 2i(1 + i) = -2 + 2i$;

3) $z_3 = (1+i)^2(1+i)^2 = 2i \cdot 2i = 4i^2 = -4;$

4) $z_4 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i;$

5) $z_5 = (1+i)^{16}(1+i) = ((1+i)^4)^4(1+i) = (-4)^4(1+i) = 256(1+i);$

6) $z_6 = \dfrac{1}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \dfrac{1}{1 - 3i - 3 + i} = \dfrac{1}{-2 - 2i} = \dfrac{1}{2(1+i)} \times$

$\times \dfrac{1-i}{1-i} = -\dfrac{1-i}{2(1-i^2)} = -\dfrac{1-i}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие числа называются натуральными? Какое обозначение введено для множества натуральных чисел?
2. Какие числа входят в множество целых чисел? Какое обозначение принято для этого множества?
3. Какое множество называется множеством рациональных чисел и как это множество обозначается?
4. Перечислите основные законы действий над рациональными числами.
5. Какие обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные?
6. Какие обыкновенные дроби выражаются только приближенными десятичными?
7. Какие десятичные дроби называются бесконечными периодическими?
8. Что называется периодом бесконечной периодической десятичной дроби?
9. Какие периодические дроби называются чистыми и смешанными и как сокращенно они записываются?
10. Как записываются целые числа и конечные десятичные дроби в виде бесконечных периодических дробей?
11. Любая ли бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом?
12. Как обратить чистую периодическую десятичную дробь в обыкновенную?
13. Как обратить смешанную периодическую десятичную дробь в обыкновенную?
14. Какое исключение представляет собой бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9?
15. Какие числа называются иррациональными и как обозначается множество иррациональных чисел?
16. Докажите, что не существует числа, квадрат которого равен 2.
17. Какие числа называются действительными и какое для них введено обозначение?
18. Какими свойствами обладает множество действительных чисел?
19. Что называется числовой прямой?

20. Что называется числовым отрезком?
21. Что называется числовым интервалом?
22. Какие промежутки называются полуоткрытыми?
23. Какие промежутки называются бесконечными?
24. Что понимается под абсолютной величиной действительного числа?
25. Почему нельзя делить на нуль?
26. Какие числа называются комплексными и мнимыми?
27. Как геометрически представляется комплексное число?
28. Что называется модулем комплексного числа?
29. Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
30. Как геометрически представляется сумма двух комплексных чисел?
31. Как выполняется умножение комплексных чисел?
32. Как выполняется деление комплексных чисел?
33. Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел?

§ 2. Метод координат

Прямоугольная система координат на плоскости позволяет в наглядной форме (в виде графиков) представлять различные функциональные зависимости и решать уравнения и системы уравнений графическим способом.

Две взаимно перпендикулярные оси (ось абсцисс Ox и ось ординат Oy) и точка пересечения — начало координат образуют при выбранной единице масштаба декартову ***систему координат****.

Из школьного курса математики известны правила построения точек и линий по их координатам, поэтому кратко укажем только основные положения метода координат.

Плоскость, на которой расположены координатные оси, называется координатной плоскостью. ***Абсциссой*** x любой точки плоскости называется число, выражающее в принятом масштабе расстояние от этой точки до оси Oy, взятое со знаком *плюс*, если точка лежит справа от оси Oy, и со знаком *минус*, если слева. ***Ординатой*** y любой точки называется число, выражающее расстоя-

---

* Система координат называется декартовой по имени французского философа, математика и физика *Рене Декарта* [*Descartes*; латинизированное имя *Cartesius* — *Картезий*] (1596—1650), разработавшего метод координат; Декарт одним из первых ввел понятия переменной величины и функции.

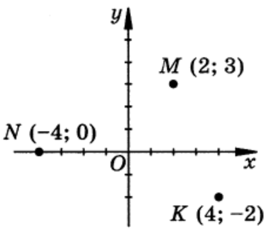


Рис. 8

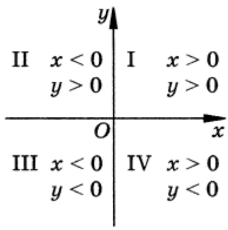


Рис. 9

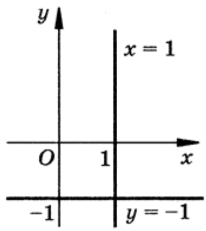


Рис. 10

ние от этой точки до оси Ox, взятое со знаком *плюс*, если точка лежит выше оси Ox, и со знаком *минус*, если ниже.

Числа x и y, определяющие положение точки на плоскости, называются прямоугольными координатами точки. На рисунке 8 изображены точки K, M, N, соответствующие своим координатам.

Каждой паре $(x; y)$ действительных чисел соответствует одна и только одна точка $M(x; y)$ на координатной плоскости, для которой абсцисса равна x, а ордината равна y; каждой точке на координатной плоскости соответствует одна и только одна пара чисел — координат этой точки.

Множество точек $x = 0$ образует ось Oy, поэтому графиком уравнения $x = 0$ является ось Oy.

Множество точек $y = 0$ образует ось Ox, поэтому графиком уравнения $y = 0$ является ось Ox.

Множество точек $y = x$ образует прямую, проходящую через начало координат и делящую I и III квадранты пополам.

Знаки координат по четвертям (квадрантам) показаны на рисунке 9. На рисунке 10 изображены графики уравнений $x = 1$ и $y = -1$.

§ 3. Погрешности приближенных значений чисел

1. Абсолютная погрешность и граница абсолютной погрешности приближенных значений чисел. Модуль (абсолютная величина) разности между точным числом x и его приближенным значением a называется ***абсолютной погрешностью*** приближенного значения числа x и обозначается через α, т. е. $|x - a| = \alpha$.

Число a называется ***приближенным значением*** точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т. е. $|x - a| \leqslant \Delta a$.

Число Δa называется ***границей абсолютной погрешности*** приближенного числа a. Существует бесконечное множество чисел Δa, удовлетворяющих приведенному определению, поэтому на практике стараются подобрать возможно меньшее и простое по записи число Δa.

По известной границе абсолютной погрешности Δa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x*:

$$(x = a \pm \Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a). \qquad (1.2)$$

♦ ПРИМЕР 1

Даны приближенные значения числа $x = \frac{2}{3}$: $a_1 = 0{,}6$; $a_2 = 0{,}66$; $a_3 = 0{,}67$. Какое из этих приближений является лучшим?

РЕШЕНИЕ.

$$\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15},$$

$$\alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150},$$

$$\alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \left|-\frac{1}{300}\right| = \frac{1}{300}.$$

Лучшим приближением числа x является $a_3 = 0{,}67$.

♦ ПРИМЕР 2

Длина детали x (см) заключена в границах $33 \leqslant x \leqslant 34$. Найти границу абсолютной погрешности измерения детали.

РЕШЕНИЕ. Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: $a = (33 + 34)/2 = 33{,}5$ (см). Тогда граница абсолютной погрешности Δa приближенного значения длины детали a не превзойдет 0,5 см.

Величину Δa можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т. е. $\Delta a = (34 - 33)/2 = 0{,}5$ см.

Длина детали x, найденная с точностью до $\Delta a = 0{,}5$ см, заключена между приближенными значениями числа x (1.2):

$$33{,}5 - 0{,}5 \leqslant x \leqslant 33{,}5 + 0{,}5; \; x = 33{,}5 \pm 0{,}5 \text{ (см)}.$$

♦ ПРИМЕР 3

Площадь квадрата равна $24{,}5 \pm 0{,}4$ (см^2). Найти границы измерения площади квадрата.

---

* Символ $\Leftrightarrow$ означает, что если **A** $\Leftrightarrow$ **B**, то из **A** следует **B** и наоборот.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.2) находим:

$$24{,}5 - 0{,}4 \leqslant x \leqslant 24{,}5 + 0{,}4;\ 24{,}1 \leqslant x \leqslant 24{,}9\ (\text{см}^2).$$

2. Верные и значащие цифры числа. Цифра m приближенного числа a называется ***верной в широком смысле***, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

Цифра m приближенного числа a называется ***верной в строгом смысле***, если граница абсолютной погрешности числа a не превосходит половины единицы того разряда, в котором записана цифра m.

В числах, полученных в результате измерений или вычислений и используемых при расчетах в качестве исходных данных, а также в десятичной записи приближенного значения числа все цифры должны быть верными.

Наиболее употребительна такая запись приближенного числа (например, в математических таблицах), при которой цифры верны в строгом смысле.

Граница абсолютной погрешности Δa находится непосредственно по записи приближенного значения a числа x. Например, если в приближенном числе $a = 1976$ цифры верны в строгом смысле, то граница абсолютной погрешности $\Delta a = 0{,}5$, т. е. равна половине последнего разряда числа 1976.

Цифры в записи приближенного числа, о которых неизвестно, являются ли они верными, называются ***сомнительными***.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

♦ ПРИМЕР 1

Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1978 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

РЕШЕНИЕ. Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т. е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

♦ ПРИМЕР 2

Указать верные цифры (в широком смысле) следующих чисел: 1) $2{,}73 \pm 0{,}056$; 2) $4{,}627 \pm 0{,}0008$; 3) $3{,}732 \pm 0{,}06$; 4) $562\,274 \pm$ $\pm\, 500$.

РЕШЕНИЕ. 1) Граница погрешности $\Delta a = 0{,}056$ не превосходит единицы разряда десятых (неравенство $0{,}056 < 0{,}1$ верное). Следовательно, верными являются цифры 2 и 7.

2) Так как $\Delta a = 0{,}0008 < 0{,}001$, то все цифры приближенного числа 4,627 верные.

3) Так как $\Delta a = 0{,}06 < 0{,}1$, верными являются цифры 3 и 7.

4) Так как $\Delta a = 500 < 1000$, то верны цифры 5, 6 и 2.

♦ ПРИМЕР 3

За приближенное значение числа 26,7 взято число 27. Являются ли цифры числа 27 верными?

РЕШЕНИЕ. Так как $|26{,}7 - 27| = 0{,}3 < 1$, то цифры 2 и 7 — верные в строгом смысле.

3. Относительная погрешность приближенного значения числа. ***Относительной погрешностью*** δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a:

$$\boxed{\delta = \frac{\alpha}{a}.} \qquad (1.3)$$

Так как абсолютная погрешность α обычно бывает неизвестна, то на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε, которое заведомо не меньше этого модуля:

$$|\delta| \leqslant \varepsilon.$$

Число ε называется ***границей относительной погрешности***.

Границей относительной погрешности a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a:

$$\boxed{\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}.} \qquad (1.4)$$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность — величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

Зависимость относительной погрешности от числа значащих цифр иллюстрируется данными, приведенными в таблице 1.

Таблица 1

Число	Наименьшее число	Наибольшее число	Граница абсолютной погрешности	Относительная погрешность наибольшего числа	Относительная погрешность наименьшего числа
Однозначное	1	0	0,5	0,56 = 5,6%	0,5 = 50%
Двузначное	10	99	0,5	0,005 = 0,5%	0,05 = 5%
Трехзначное	100	999	0,5	0,0005 = 0,05%	0,005 = 0,5%
Четырехзначное	1000	9999	0,5	0,00005 = 0,005%	0,005 = 0,05%

Из таблицы видно, что три верные значащие цифры обеспечивают точность результата (относительную погрешность) от $0{,}05\%$ до $0{,}5\%$. В технических расчетах, не требующих высокой точности, достаточно бывает обеспечить точность результата порядка десятых долей процента. Поэтому в таких расчетах принято выполнять вычисления с тремя значащими цифрами.

В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины:

$$\boxed{\Delta a = |a| \cdot \varepsilon_a.} \tag{1.5}$$

♦ ПРИМЕР 1

В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих двух измерений?

РЕШЕНИЕ. Будем считать границу абсолютной погрешности измерений равной $\pm\,0{,}5$ см. Найдем относительные погрешности этих измерений (1.3):

$\delta = \dfrac{0{,}5}{16} = 0{,}0312 \approx 3{,}1\%$ (при измерении длины карандаша);

$\delta = \dfrac{0{,}5}{730} = 0{,}000685 \approx 0{,}07\%$ (при измерении длины комнаты).

Следовательно, качество измерения длины комнаты значительно выше, чем качество измерения длины карандаша.

♦ ПРИМЕР 2

Найти относительную погрешность числа 6,8, если обе цифры его верны в строгом смысле.

РЕШЕНИЕ. По условию $\Delta a = 0{,}05$; поэтому согласно (1.4)

$$\varepsilon_a = \frac{0{,}5}{6{,}8} = 0{,}00735 = 0{,}7\%.$$

♦ ПРИМЕР 3

Какие цифры числа 4,86 при относительной погрешности, равной $0{,}03\%$, являются верными?

РЕШЕНИЕ. В соответствии с формулой (1.5) находим

$$\Delta a = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}0146 < 0{,}2;$$
$$a = 4{,}86 \pm 0{,}02.$$

Верными являются первые две цифры 4 и 8.

4. Округление и погрешность округления. Округление десятичной дроби состоит в отбрасывании единиц младших разрядов начиная с некоторого. Полученное число принимается в качестве приближенного значения дроби. Абсолютная погрешность, допускаемая при округлении, называется ***погрешностью округления***.

Рассмотрим три способа округления положительных десятичных дробей: округление с недостатком, округление с избытком и округление с наименьшей погрешностью.

Округление с недостатком до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов.

♦ ПРИМЕР

Округлить с недостатком до сотых, десятых и единиц число 54,376.

РЕШЕНИЕ: Имеем 54,37; 54,3; 54. Погрешности округления соответственно равны 0,006; 0,076; 0,376.

При ***округлении с избытком*** до единиц некоторого разряда число единиц данного разряда увеличивают на единицу.

♦ ПРИМЕР

Округлить с избытком до сотых, десятых и единиц число 24,368.

РЕШЕНИЕ. Имеем 24,37; 24,4; 25. Погрешности округления соответственно равны 0,002; 0,032; 0,632.

Наиболее часто применяемым является правило округления ***с наименьшей погрешностью*** (правило округления десятичных дробей). Это округление производится по следующим правилам:

1) единицы младших разрядов отбрасываются;

2) число единиц данного разряда не изменяется, если следующая цифра дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

♦ ПРИМЕР

Округлить с наименьшей погрешностью до сотых, десятых и единиц число 32,467.

РЕШЕНИЕ. Имеем 32,47; 32,5; 32. Погрешности округления соответственно равны 0,003; 0,033; 0,467.

Из правил округления можно сделать вывод, что при округлении с недостатком и с избытком погрешность может быть больше половины единицы последнего сохраняемого разряда, но не превышает единицы этого разряда.

При округлении с наименьшей погрешностью она не превышает половины единицы последнего сохраняемого разряда.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется абсолютной погрешностью приближенного числа?
2. Что называется границей абсолютной погрешности?
3. Какие цифры приближенного числа называются верными в широком смысле и в строгом смысле?
4. Какие цифры приближенного числа называются значащими?
5. Что называется относительной погрешностью приближенного числа?
6. Что называется границей относительной погрешности приближенного числа?
7. Как зависит относительная погрешность от числа значащих цифр?
8. Как связаны границы абсолютной и относительной погрешностей?
9. Что называется округлением десятичной дроби?
10. Что называется погрешностью округления?
11. Как производится округление с недостатком?
12. Как производится округление с избытком?
13. Как производится округление с наименьшей погрешностью? Перечислите правила этого округления.

§ 4. Действия над приближенными значениями чисел

1. Сложение приближенных значений чисел. Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\boxed{\Delta\,(a+b)=\Delta a+\Delta b,} \qquad (1.6)$$

где a и b — приближенные значения чисел; Δa и Δb — границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле:

$$\boxed{\varepsilon_{a+b} = \frac{\Delta(a+b)}{a+b}.} \tag{1.7}$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти сумму S приближенных значений следующих чисел: $6{,}8 \pm 0{,}05$; $4{,}3 \pm 0{,}05$ и $3{,}575 \pm 0{,}0005$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$S = 6{,}8 + 4{,}3 + 3{,}575 = 14{,}675,$$
$$\Delta S = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}0005 = 0{,}1005.$$

Граница абсолютной погрешности 0,1005 заключена в пределах $0{,}05 < 0{,}1005 < 0{,}5$. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц: $S = 14{,}675 = 15$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти сумму $S = \sqrt{5} + \sqrt{11}$, взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001. Определить границу абсолютной погрешности ΔS и границу относительной погрешности ε_S.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$S = \sqrt{5} + \sqrt{11} = 2{,}236 + 3{,}317 = 5{,}553 \approx 5{,}55.$$

По формуле (1.6)

$$\Delta S = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001.$$

Согласно формуле (1.7)

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta S}{S} = \frac{0{,}001}{5{,}55} = 0{,}00018.$$

2. Вычитание приближенных значений чисел. Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\boxed{\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b.} \tag{1.8}$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле

$$\boxed{\varepsilon_{a-b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}.} \qquad (1.9)$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить разность двух приближенных значений чисел $a = 5{,}863 \pm 0{,}0005$ и $b = 2{,}746 \pm 0{,}0005$. Определить $\Delta\,(a - b)$ и ε_{a-b}.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.8) находим границу абсолютной погрешности разности $(a - b)$:

$$\Delta\,(a - b) = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001.$$

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta\,(a - b) > 0{,}005$. Поэтому

$$a - b = 5{,}863 - 2{,}746 = 3{,}117 \approx 3{,}12.$$

В приближенном числе 3,12 все цифры верные.

По формуле (1.9) находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{0{,}001}{3{,}12} = 0{,}00032 \approx 0{,}03\%.$$

3. Умножение приближенных значений чисел. Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной погрешности Δy и относительной погрешности ε_y некоторых функций

Для $y = ab$: $\quad \Delta y = |b| \cdot \Delta a + a\,\Delta b,\ \varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b};$ (1.10)

для $y = abc$: $\quad \Delta y = |bc| \cdot \Delta a + |ac| \cdot \Delta b + |ab| \cdot \Delta c,$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}; \qquad (1.11)$$

для $y = a^n$: $\quad \Delta y = na^{n-1}\,\Delta a,\ \varepsilon_y = n\dfrac{\Delta a}{a};$ (1.12)

для $y = a^2$: $\quad \Delta y = 2a \cdot \Delta a,\ \varepsilon_y = 2\dfrac{\Delta a}{a};$ (1.13) для $y = a^3$: $\Delta y = 3a^2 \cdot \Delta a,\ \varepsilon_y = 3\frac{\Delta a}{a}$; (1.14)

для $y = \sqrt{a}$: $\Delta y = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}},\ \varepsilon_y = \frac{\Delta a}{2a}$; (1.15)

для $y = \sqrt[3]{a}$: $\Delta y = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}},\ \varepsilon_y = \frac{\Delta a}{3a}$; (1.16)

для $y = \frac{a}{b}$: $\Delta y = \frac{|b| \cdot \Delta a + |a| \cdot \Delta b}{b^2},\ \varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$. (1.17)

♦ ПРИМЕР

Найти верные цифры произведения двух приближенных значений чисел $a = 0{,}3862$ и $b = 0{,}8$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $a \cdot b = 0{,}3862 \cdot 0{,}8 = 0{,}30896$. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны $0{,}00005$ и $0{,}05$. По формуле (1.10) находим относительную погрешность произведения

$$\varepsilon_{ab} = \frac{0{,}00005}{0{,}3862} + \frac{0{,}05}{0{,}8} = 0{,}063.$$

По формуле (1.5) находим границу абсолютной погрешности произведения

$$\Delta\,(ab) = (ab)\varepsilon_{ab} = 0{,}30896 \cdot 0{,}063 = 0{,}0195;$$
$$0{,}005 < 0{,}0195 < 0{,}05.$$

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): $0{,}30896 \approx 0{,}3$.

4. Деление приближенных значений чисел. Определение границ абсолютной и относительной погрешностей при делении осуществляется с помощью выражений (1.17).

♦ ПРИМЕР

Найти границу абсолютной погрешности частного двух приближенных значений чисел $a = 8{,}36 \pm 0{,}005$ и $b = 3{,}72 \pm 0{,}004$.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $\frac{a}{b} = \frac{8{,}36}{3{,}72} = 2{,}25$.

По формуле (1.17) находим границу относительной погрешности частного:

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{0{,}005}{8{,}36} + \frac{0{,}004}{3{,}72} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

По формуле (1.5) находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\varepsilon_{a/b} = 2{,}25 \cdot 0{,}002 = 0{,}0045.$$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

5. Возведение в степень приближенных значений чисел и извлечение из них корня. Для определения абсолютной и относительной погрешностей при возведении в степень и извлечении корня используют формулу (1.12) и выражения для ее частных случаев (1.13—1.16).

♦ ПРИМЕР 1

Вычислить относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно $l = 68 \pm 0{,}5$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.13) получим

$$\varepsilon_{68^2} = 2\frac{0{,}5}{68} = 0{,}015 = 1{,}5\%.$$

♦ ПРИМЕР 2

Вычислить относительную погрешность, допущенную при извлечении квадратного корня из числа $76{,}8 \pm 0{,}05$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.15) получим

$$\varepsilon_{\sqrt{76,8}} = \frac{0{,}05}{2 \cdot 76{,}8} = 0{,}0003 = 0{,}03\%.$$

6. Вычисление с наперед заданной точностью. В предыдущих задачах по известным границам погрешностей данных определялись границы погрешностей результата. Теперь рассмотрим обратную задачу, в которой нужно установить, с какой точностью необходимо знать данные, чтобы обеспечить некоторую наперед заданную точность результата.

♦ ПРИМЕР 1

С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности площади не превышала 1 см^2? Грубое (приближенное) значение стороны квадрата равно 9 см.

РЕШЕНИЕ. Так как площадь $S = a^2$, то по формуле (1.13) $\Delta S = 2a \cdot \Delta a$, откуда

$$\Delta a = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{1}{2 \cdot 9} = 0{,}0556 \approx 0{,}1 \text{ (см)}.$$

Итак, если измерить величину a с погрешностью, не превышающей 0,1 см, то погрешность площади не превысит 1 см^2.

♦ ПРИМЕР 2

С какой точностью надо измерить длину ребра куба a, чтобы при вычислении его объема граница абсолютной погрешности не превышала 100 см^3? Грубое (приближенное) значение ребра куба равно 80 см.

РЕШЕНИЕ. Так как объем $V = a^3$, то по формуле (1.14) $\Delta V = 3a^2 \cdot \Delta a$, из чего следует, что

$$\Delta a = \frac{\Delta V}{3a^2} = \frac{100}{3 \cdot 80^2} = 0{,}005 \text{ (см)}.$$

Таким образом, если измерить величину a с погрешностью, не превышающей 0,005 см, то погрешность значения объема не превысит 100 см^2.

7. Вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей. Во многих случаях вычислительной практики возможно упростить вычисления с приближенными числами без подсчета погрешностей, применяя правила подсчета цифр*.

Правила подсчета цифр

I. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в том из приближенных чисел, у которого наименьшее число десятичных знаков.

II. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет то из приближенных данных, у которого число значащих цифр наименьшее.

III. При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число. Последняя цифра квадрата и тем более куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания.

---

* Эти правила были разработаны профессором В. М. Брадисом (1890—1975).

IV. При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное (приближенное) число. Последняя цифра квадратного и тем более кубического корня при этом более надежна, чем последняя подкоренного числа.

V. При вычислении промежуточных результатов следует брать на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила.

VI. Числа, которые имеют больше десятичных знаков, чем другие (при действиях первой ступени), или больше значащих цифр (при действиях второй и третьей ступени), следует предварительно округлять, сохраняя одну лишнюю цифру.

При применении всех правил подсчета цифр следует избегать нулей, помещенных в конце приближенных чисел вместо неизвестных цифр.

Применяя правила подсчета цифр, следует помнить, что они не дают гарантии точности последней цифры результата. Эта последняя цифра может иметь погрешность, достигающую в отдельных случаях нескольких единиц, но малые значения этой погрешности более вероятны, чем большие.

При вычислениях с приближенными числами на микрокалькуляторе необходимо руководствоваться «Правилами подсчета цифр»*.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как вычисляется граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел?
2. Как вычисляется граница относительной погрешности суммы приближенных значений чисел?
3. Как вычисляется граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел?
4. Как вычисляется граница относительной погрешности разности приближенных значений чисел?
5. Как вычисляется граница относительной погрешности произведения и частного приближенных значений чисел?

---

* *Брадис В. М.* Четырехзначные математические таблицы: для общеобразовательных учебных заведений. — М.: Дрофа, 2008.

6. Как вычисляется граница относительной погрешности степени приближенного значения числа?
7. Как вычисляется граница относительной погрешности квадратного и кубического корней из приближенных значений чисел?
8. Как применяются «Правила подсчета цифр» при сложении и вычитании приближенных значений чисел?
9. Как применяются «Правила подсчета цифр» при умножении и делении приближенных значений чисел?
10. Как применяются «Правила подсчета цифр» при извлечении квадратного корня и при возведении в квадрат приближенных значений чисел?

§ 5. Линейные уравнения с одной переменной

1. Основные определения. В математике любое предложение, относительно которого можно сказать, является оно истинным либо ложным, называется ***высказыванием.***

Если из высказывания **A** следует высказывание **B**, то это записывается следующим образом:

A $\Rightarrow$ **B** (из **A** следует **B**).

Если из высказывания **A** следует высказывание **B**, а из высказывания **B** следует высказывание **A**, то они называются ***равносильными*** и обозначаются: **A** $\Leftrightarrow$ **B**.

Равенство с одной переменной называется ***уравнением с одной переменной***, если нужно найти те значения переменной, при которых получается верное числовое равенство.

Корнем или ***решением*** уравнения называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Уравнения называются ***равносильными***, если множества их решений равны.

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где a и b — действительные числа.

Решение линейных уравнений и уравнений, сводящихся к линейным, основано на следующих теоремах:

I. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

II. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то получится уравнение, равносильное данному.

♦ ПРИМЕР 1

Решить уравнение $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\frac{1}{4}x = -\frac{3}{8} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{3}{8}\right) : \left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $6 - 2x - \frac{2-5x}{3} = \frac{6x-4}{5}$.

РЕШЕНИЕ. Умножив обе части уравнения на 15, получим:

$$6 - 2x - \frac{2-5x}{3} = \frac{6x-4}{5} \Leftrightarrow 90 - 30x - 10 + 25x = 18x - 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30x + 25x - 18x = -12 - 90 + 10 \Leftrightarrow -23x = -92 \Leftrightarrow x = \frac{-92}{-23} = 4.$$

Линейное уравнение $ax + b = 0$ может иметь только одно решение, или совсем не иметь решения, или иметь бесконечное множество решений. Поясним это с помощью примеров:

1) уравнение $5x + 4 = 0$ имеет единственное решение $x = -5/4$;

2) уравнение $3x = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;

3) уравнение $0 \cdot x + 2 = 0$ не имеет решения, так как при любом значении x произведение $0 \cdot x = 0$ и $0 + 2 \neq 0$;

4) уравнение $0 \cdot x = 0$ имеет бесконечное множество решений, любое число является решением этого уравнения.

2. Дробно-рациональные уравнения. К линейным уравнениям приводятся и некоторые уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби.

Рассмотрим приемы решения таких уравнений.

I. $\frac{2x-9}{2x-5} - \frac{3x}{2-3x} = 2.$

Приведем уравнение к целому виду, умножив все члены уравнения на произведение $(2x - 5)\cdot(2 - 3x)$. Учитывая, что на нуль делить нельзя, каждый из знаменателей $2x - 5$ и $2 - 3x$ не может быть равен нулю. Если бы значение x оказалось равным $5/2$ или $2/3$, то уравнение не имело бы решения.

$$\begin{cases} \dfrac{2x-9}{2x-5} - \dfrac{3x}{2-3x} = 2, \\ 2x-5 \neq 0 \\ 2-3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-9)(2-3x) - 3x(2x-5) - 2(2x-5)(2-3x) = 0, \\ x \neq \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+2=0, \\ x \neq \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}, \\ x \neq \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}.$$

II. $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3-x}{x-2} + 3 = 0.$

Выполнив преобразования, как и в предыдущем примере, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3-x}{x-2} + 3 = 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + x + 3x - 6 = 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8=0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Корень $x = 2$ оказался посторонним. Уравнение не имеет решения.

III. $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{3(3x-1)}{(x-3)(x+3)}.$

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{3(3x-1)}{(x-3)(x+3)}, \\ x \neq -3, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3) - (x-2)(x-3) - 3(3x-1) = 0, \\ x \neq -3, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ x \neq -3, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Уравнение имеет бесконечное множество решений. Корнем является любое действительное число, кроме $x = -3$ и $x = 3$.

IV. $\frac{2x+1}{x-3} - \frac{5-4x}{x-3} = 6.$

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x-3} - \frac{5-4x}{x-3} = 6, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1-5+4x-6x+18=0, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 14 = 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Ни при одном значении переменной x сумма $0 \cdot x + 14$ не может быть равной нулю. Уравнение корней не имеет.

♦ ПРИМЕР

Разделить 850 на две части так, чтобы 8% первой части в сумме с 24% второй части составили 12% всего числа.

РЕШЕНИЕ. Пусть часть I равна x, тогда часть II будет равна $850 - x$, при этом 8% от части I равны $0{,}08x$, 24% от части II равны $0{,}24(850 - x)$ и 12% от 850 равны $0{,}12 \cdot 850$.

Составим уравнение

$$0{,}08x + 0{,}24(850 - x) = 0{,}12 \cdot 850.$$

Упростив его, получим:

$$-0{,}16x = -102 \Rightarrow x = 637{,}5.$$

Следовательно, часть I равна 637,5; часть II равна $850 - 637{,}5 = 212{,}5$.

3. Графический способ решения линейных уравнений. Уравнение вида $ax = b$, к которому может быть сведено любое линейное уравнение, можно решить графическим способом.

На одном и том же чертеже построим графики двух функций: $y = ax$ и $y = b$. Если эти графики пересекутся, то абсцисса их точки пересечения и будет корнем уравнения $ax = b$.

Если графики не будут иметь точки пересечения, то уравнение не будет иметь корней.

Рассмотрим три случая.

I. $a \neq 0$. Графиком функции $y = ax$ будет прямая, проходящая через начало координат, наклоненная к оси Ox под некоторым углом α (рис. 11). Графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox. Эти две прямые пересекаются в единственной точке M. Абсцисса точки пересечения $\frac{b}{a}$ и есть корень уравнения $ax = b$.

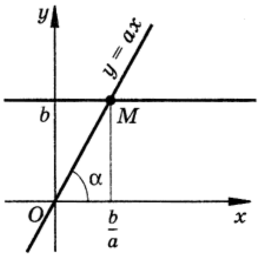


Рис. 11

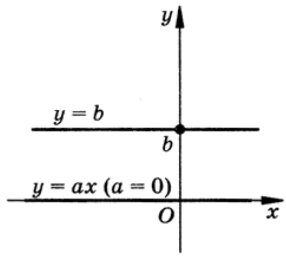


Рис. 12

II. $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$. В этом случае прямая $y = ax$ совпадает с осью Ox, а прямая $y = b$ параллельна оси Ox (рис. 12). Прямые $y = ax$ и $y = b$ оказались параллельными. Эти прямые не имеют точки пересечения, поэтому уравнение $ax = b$ не имеет корней.

III. $\boldsymbol{a = b = 0}$. В этом случае прямые $y = ax$ и $y = b$ совпадают, сливаясь с осью Ox (рис. 13). Можно утверждать, что эти прямые пересекаются в каждой точке оси Ox, поэтому любое число является корнем уравнения $ax = b$.

♦ ПРИМЕР

Графически решить уравнение $2x = 5$.

РЕШЕНИЕ. Строим прямые $y = 2x$ и $y = 5$ (рис. 14). Эти прямые пересекаются в точке $(5/2;\ 5)$. Абсцисса $5/2$ является корнем уравнения $2x = 5$.

4. Основные свойства модуля (абсолютной величины). ***Модуль*** действительного числа $|x|$ равен самому числу x, если x положительное число, или равен числу $-x$, если x отрицательное число. Модуль нуля равен нулю.

Например, если $|x| = 5$, то по определению модуля $x = 5$ или $x = -5$.

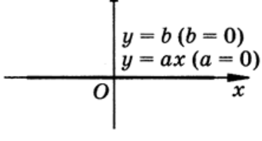


Рис. 13

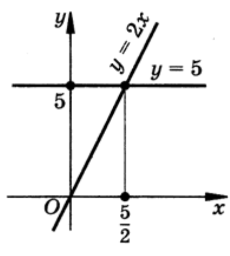


Рис. 14

Свойства модуля

I. Два противоположных числа имеют один и тот же модуль: $|a| = |-a|$, модуль числа не изменится, если число умножить на (-1).

II. Модуль не может быть отрицательным числом: $|a| \geqslant 0$.

III. Число не может быть больше своего модуля: $a \leqslant |a|$.

IV. Модуль суммы действительных чисел не больше суммы их модулей:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

V. Модуль разности двух чисел не меньше разности модулей этих чисел:

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

VI. Модуль произведения нескольких чисел равен произведению их модулей:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

VII. Модуль целой степени какого-либо числа равен степени его модуля:

$$|a^n| = |a|^n.$$

VIII. Модуль частного двух чисел равен частному их модулей:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0.$$

5. Системы и совокупности двух предложений. ***Системой двух предложений*** $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ называется предложение, которое записывается с помощью фигурной скобки (здесь $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$ — уравнения или неравенства с одной переменной):

$$\begin{cases} \mathbf{A}(x), \\ \mathbf{B}(x). \end{cases}$$

Число x_0 называют ***решением системы***, если оно является решением каждого из предложений $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$.

Совокупностью (объединением) двух предложений $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ называется предложение «$\mathbf{A}(x)$ или $\mathbf{B}(x)$», которое записывается с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{A}(x), \\ \mathbf{B}(x). \end{array}\right.$$

Число x_0 называется ***решением совокупности***, если x_0 является решением хотя бы одного из предложений $\mathbf{A}(x)$ или $\mathbf{B}(x)$.

Например, переход от уравнения $(ax + b)(cx + d) = 0$ к совокупности уравнений выражается соотношением:

$$((ax+b)(cx+d)=0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax+b=0, \\ cx+d=0, \end{array}\right.$$

т. е. $ax + b = 0$ или $cx + d = 0$.

6. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля. При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, будем руководствоваться определением модуля:

$$|x| = \left[\begin{array}{rl} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{array}\right.$$

♦ ПРИМЕР 1

Решить уравнение $|x| = 3$.

РЕШЕНИЕ. По определению модуля:

$$(|x| = 3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Решим это уравнение графическим способом. Построим графики функций $y = |x|$ и $y = 3$ (рис. 15). Для построения графика функции $y = |x|$ строим прямые $y = x$ и $y = -x$. График функции $y = |x|$ есть сплошная линия, симметричная относительно оси ординат и расположенная выше оси абсцисс ($|x|$ — число положительное, следовательно, график расположен выше оси абсцисс). При $x > 0$ график совпадает с прямой $y = x$, а при $x < 0$ — с прямой $y = -x$. Далее строим прямую $y = 3$. График функции $y = x$ пересекается с прямой $y = 3$ в двух точках M_1 и M_2 с абсциссами $x = 3$ и $x = -3$, которые являются корнями уравнения $|x| = 3$.

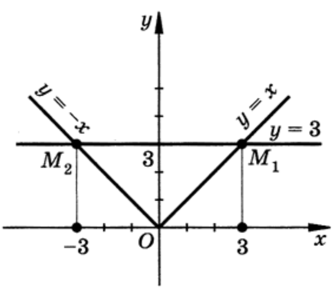


Рис. 15

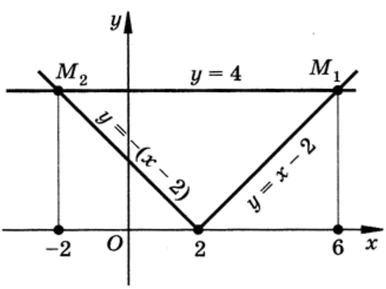


Рис. 16

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $|x - 2| = 4$.

РЕШЕНИЕ. По определению модуля:

$$(|x-2|=4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=-4, \\ x-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Графическое решение этого уравнения дано на рисунке 16.

♦ ПРИМЕР 3

Решить уравнение $|6 - 2x| = 3x + 1$.

РЕШЕНИЕ. Правая часть уравнения положительна или равна нулю: $3x + 1 \geqslant 0$. Данное уравнение представляет собой совокупность двух смешанных систем:

$$(|6-2x|=3x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-2x=3x+1, \\ 3x+1\geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 6-2x=-(3x+1), \\ 3x+1\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5x=-5, \\ x\geqslant -\frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-7, \\ x\geqslant -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ x\geqslant -\frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-7, \\ x\geqslant -\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \text{решения нет.} \end{array}\right.$$

Число $x = -7$ не является корнем уравнения, так как $-7 < -1/3$. Следовательно, уравнение имеет решение $x = 1$.

При графическом решении этого уравнения (рис. 17) графики $y = |6 - 2x|$ и $y = 3x + 1$ пересекаются в единственной точке с абсциссой $x = 1$, которая и является корнем данного уравнения.

♦ ПРИМЕР 4

Решить уравнение $|4 - 2x| = x - 5$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$(|4-2x|=x-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-2x=x-5, \\ x-5\geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4-2x=-(x-5), \\ x-5\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3x=-9, \\ x\geqslant 5; \end{cases} \\ \begin{cases} -x=1, \\ x\geqslant 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ x\geqslant 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1, \\ x\geqslant 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решения нет,} \\ \text{решения нет.} \end{array}\right.$$

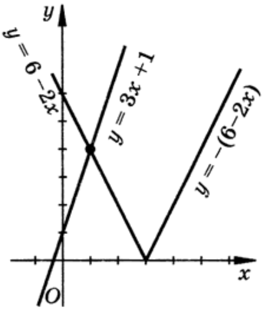


Рис. 17

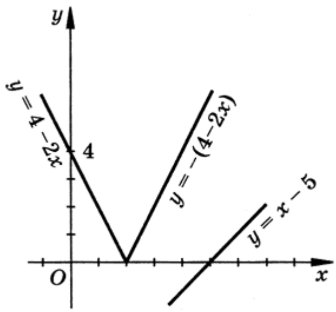


Рис. 18

Графическое представление решения этого уравнения (рис. 18) показывает, что график уравнения $y = |4 - 2x|$ не имеет точек пересечения с графиком $y = x - 5$, следовательно, уравнение не имеет решений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение уравнения с одной переменной.
2. Как записывается в общем виде линейное уравнение?
3. Какие уравнения называются равносильными?
4. Что называется корнем уравнения?
5. Сформулируйте теоремы, на основании которых решаются линейные уравнения.
6. Какой вид имеют линейные уравнения, имеющие одно решение, не имеющие решения и имеющие бесконечное множество решений?
7. Какие уравнения называются дробно-рациональными?
8. Как выполняется графическое решение линейных уравнений?
9. Как графически изображается линейное уравнение, имеющее одно решение, не имеющее решения и имеющее бесконечное множество решений?
10. Дайте определение модуля действительного числа.
11. Перечислите основные свойства модуля действительного числа.
12. Что называется системой двух уравнений с одной переменной?
13. Что называется совокупностью двух уравнений с одной переменной?
14. В чем состоит различие между системой и совокупностью двух уравнений с одной переменной?
15. Как выполняется решение линейных уравнений, содержащих переменную под знаком модуля?
16. Как графически выполняется решение линейных уравнений, содержащих переменную под знаком модуля?

§ 6. Линейные неравенства

1. Неравенства и их основные свойства. Два алгебраических выражения или два числа, соединенные знаком больше или меньше, называются ***неравенствами***.

Неравенства могут быть как числовыми: $5 > 3$; $-8 < -3$; $-7 < 5$, так и алгебраическими: $a > b$; $a^2 > 0$; $a + b < c + d$.

Любое положительное число больше нуля: $7 > 0$; $3/4 > 0$.

Любое отрицательное число меньше нуля: $-6 < 0$; $-5/7 < 0$.

Любое положительное число больше любого отрицательного числа: $8 > -3$; $-7 < 2$; $3 > -3$.

Из двух положительных чисел бо́льшим считается то, абсолютная величина которого больше: $13 > 7$; $4 < 8$.

Из двух отрицательных чисел бо́льшим считается то, абсолютная величина которого меньше: $-5 > -9$, так как $|-5| < |-9|$; $-6 < -1$, так как $|-6| > |-1|$.

Решением неравенства называется значение переменной, при котором неравенство истинно (обращается в верное числовое неравенство). Решить неравенство — значит найти множество его решений.

Неравенства называются ***равносильными***, если множества их решений равны.

Основные свойства неравенств

I. Если к обеим частям неравенства прибавить (или отнять) одно и то же число, то получится неравенство, равносильное данному:
если $a > b$ и m — любое число, то $a + m > b + m$.

II. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному:
если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$.

III. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный:
если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

IV. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

V. Правило сложения неравенств:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{c} a > b \\ c > d \end{array} \\ \hline a + c > b + d, \end{array}$$

т. е. неравенства одного смысла можно почленно складывать*.

Например:

1) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} -8 < -4 \\ 2 > 1 \end{array} \\ \hline -6 < -3; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} -8 < -4 \\ 5 > -1 \end{array} \\ \hline -3 > -5; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} -8 < -4 \\ 2 > -2 \end{array} \\ \hline -6 = -6. \end{array}$

VI. Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, в результате получится неравенство одного смысла с уменьшаемым:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{c} a > b \\ c < d \end{array} \\ \hline a - c > b - d. \end{array}$$

VII. Правило умножения неравенств:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{c} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{array} \\ \hline ac < bd. \end{array}$$

В частности, если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$ для любого натурального числа $n > 0$.

2. Линейные неравенства. ***Линейным неравенством*** называется неравенство вида $ax + b > 0$ (или $ax + b < 0$), где a и b — действительные числа.

♦ ПРИМЕРЫ **1—4**

Решить неравенство.

1. $x + 4 > 2 - 3x$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$(x + 4 > 2 - 3x) \Leftrightarrow (4x > -2) \Leftrightarrow (x > -0{,}5),\ -0{,}5 < x < +\infty.$$

---

* При сложении двух неравенств противоположного смысла в результате может получиться неравенство любого смысла и даже равенство, поэтому для такого сложения нельзя дать общего правила.

2. $\frac{4-3x}{3} < \frac{2x-1}{4} - \frac{5x-2}{6}$.

РЕШЕНИЕ. Умножив обе части неравенства почленно на 12, получим

$$(4(4-3x) < 3(2x-1) - 2(5x-2)) \Leftrightarrow (-8x < -15) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x > \frac{15}{8}\right),\ \frac{15}{8} < x < +\infty.$$

3. $(2x-1)^2 - 8x < (3-2x)^2$.

РЕШЕНИЕ. Получаем

$$((2x-1)^2 - 8x < (3-2x)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1 - 8x < 9 - 12x + 4x^2) \Leftrightarrow (0 < 0 \cdot x < 8).$$

Данному неравенству удовлетворяет любое значение x, $-\infty < x < +\infty$.

4. $(x-2)^2 - 2x + 10 < (3-x)^2$.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$((x-2)^2 - 2x + 10) < (3-x)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4 - 2x + 10 < 9 - 6x + x^2) \Leftrightarrow (0 < 0 \cdot x < -5).$$

Данное неравенство решений не имеет.

3. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной. Неравенства $f_1(x) < 0$, $f_2(x) < 0$, записанные в виде

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, & (\alpha) \\ f_2(x) < 0, & (\beta) \end{cases}$$

образуют ***систему двух неравенств с одним неизвестным x***. Неравенства (α) и (β) могут содержать различные знаки неравенств $>$, $<$, $\leqslant$, $\geqslant$. Система может содержать большее количество неравенств: три, четыре, ...

Число x является ***решением системы*** (α) — (β), если x удовлетворяет ***каждому*** неравенству системы.

Чтобы найти решение системы неравенств, чаще всего поступают следующим образом.

I. Находят решение каждого неравенства системы.

II. Изображают найденные решения на числовой прямой.

III. Используя построенное изображение и определение понятия решения системы, находят множество ее решений.

Множество решений системы может иметь различную структуру: содержать одну или несколько изолированных точек; являться промежутком числовой прямой; быть объединением изолированных точек и промежутков. Решение системы может не содержать ни одной точки; в этом случае говорят, что система решений не имеет. Система неравенств не имеет решений, если хотя бы одно из неравенств системы не имеет решений.

Для решения системы линейных неравенств рекомендуется привести ее к ***стандартному виду***, т. е. записать одним из следующих трех способов:

I. $\begin{cases} x < a_1, \\ x < b_1. \end{cases}$

II. $\begin{cases} 0 \cdot x < a_1, \\ x < b_1. \end{cases}$

III. $\begin{cases} 0 \cdot x < a_1, \\ 0 \cdot x < b_1. \end{cases}$

Знаки неравенств в системах могут быть различными.

♦ ПРИМЕРЫ

Решить систему неравенств [1—4].

1. $\begin{cases} 6x + 2 > 3x - 4, \\ 2x + 1 > 4x - 7. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} 6x + 2 > 3x - 4, \\ 2x + 1 > 4x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -6, \\ -2x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 4.$$

2. $\begin{cases} \dfrac{5 - x}{8} + \dfrac{3 - 2x}{4} > 0, \\ \dfrac{3x - 5}{2} - \dfrac{2x - 1}{3} < -2. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} \dfrac{5 - x}{8} + \dfrac{3 - 2x}{4} > 0, \\ \dfrac{3x - 5}{2} - \dfrac{2x - 1}{3} < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x + 6 - 4x > 0, \\ 9x - 15 - 4x + 2 < -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x > -11, \\ 5x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{11}{5}, \\ x < \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{5}, \ -\infty < x < \dfrac{1}{5}.$$

3. $\begin{cases} 2(2x-1) \geqslant 3(1+x), \\ 1 - \dfrac{1}{2}x < \dfrac{3}{4}x - 4. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} 2(2x-1) \geqslant 3(1+x), \\ 1 - \dfrac{1}{2}x < \dfrac{3}{4}x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 \geqslant 3 + 3x, \\ 4 - 2x < 3x - 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ -5x < -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \geqslant 5, \quad 5 \leqslant x < +\infty.$$

4. $\begin{cases} 3x - 8 < 2x - 10, \\ 2 - 5x \geqslant 6 - 6x. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} 3x - 8 < 2x - 10, \\ 2 - 5x \geqslant 6 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x \geqslant 4, \end{cases} \quad \text{система не имеет решения.}$$

Неравенства $f_1(x) < 0$, $f_2(x) < 0$, записанные в виде

$$\left[\begin{array}{ll} f_1(x) < 0, & (\alpha) \\ f_2(x) < 0, & (\beta) \end{array}\right.$$

образуют ***совокупность двух неравенств с одним неизвестным x***. Так же как и система неравенств, совокупность неравенств (α) и (β) может содержать различные знаки неравенств $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$. Совокупность может содержать большее количество неравенств: три, четыре, ...

Число x является ***решением совокупности*** неравенств (α) и (β), если x удовлетворяет ***хотя бы одному неравенству*** совокупности.

Чтобы найти решение совокупности неравенств, чаще всего поступают следующим образом.

I. Находят решение каждого неравенства совокупности.

II. Изображают найденные решения на числовой прямой.

III. Используя построенное изображение и определение понятия решения совокупности, находят множество решений совокупности.

Множество решений совокупности может содержать одну или несколько изолированных точек; являться промежутком числовой прямой; быть объединением изолированных точек и промежутков. Решение совокупности может не содержать ни одной точки; в этом случае говорят, что совокупность не имеет решений. Совокупность неравенств не имеет решений, если каждое неравенство совокупности не имеет решений.

♦ ПРИМЕР 1

Решить неравенство

$$(2x+1)(3x-6) > 0.$$

РЕШЕНИЕ. Решение сводится к решению совокупности систем линейных неравенств:

$$(2x+1)(3x-6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1>0, \\ 3x-6>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+1<0, \\ 3x-6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-\frac{1}{2}, \\ x>2; \end{cases} \\ \begin{cases} x<-\frac{1}{2}, \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-\frac{1}{2}, \end{array}\right. -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{ или } 2 < x < +\infty.$$

♦ ПРИМЕРЫ

Решить совокупность неравенств [1, 2].

1. $\left[\begin{array}{l} 3x-7>7x+9, \\ x-3>-3x+1. \end{array}\right.$

РЕШЕНИЕ.

$$\left[\begin{array}{l} 3x-7>7x+9, \\ x-3>-3x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x>16, \\ 4x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4, \\ x>1, \end{array}\right. \qquad -\infty < x < -4 \text{ или } 1 < x < +\infty.$$

2. $\left[\begin{array}{l} 4-3x<5(2-x), \\ 2-3x>x-18. \end{array}\right.$

РЕШЕНИЕ.

$$\left[\begin{array}{l} 4-3x<5(2-x), \\ 2-3x>x-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-3x<10-5x, \\ 2-3x>x-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<6, \\ -4x>-20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x<3, \qquad -\infty < x < 3.$$

Замечание. Неравенство $x < 5$ является решением второго неравенства совокупности.

4. Дробно-рациональные неравенства. ***Дробно-рациональным неравенством*** с одной переменной x называется неравенство, которое с помощью равносильных преобразований можно привести к виду*

$$\frac{a_1x + a_0}{b_1x + b_0} > 0,$$

где a_1, a_0, b_1, b_0 и x — действительные числа (знак неравенства может быть любым другим: $<$, $\leqslant$, $\geqslant$).

♦ ПРИМЕРЫ

Решить неравенство [1 — 3].

1. $\dfrac{2x - 3}{3x - 6} > 0.$

РЕШЕНИЕ. Решение этого нелинейного неравенства с одной переменной сводится к решению совокупности двух систем линейных неравенств с одной переменной, так как дробь положительна в том случае, если ее числитель и знаменатель имеют значения одного знака. Поэтому

$$\frac{2x-3}{3x-6} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3>0, \\ 3x-6>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3<0, \\ 3x-6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\dfrac{3}{2}, \\ x>2; \end{cases} \\ \begin{cases} x<\dfrac{3}{2}, \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<\dfrac{3}{2}, \end{array}\right. \qquad -\infty < x < \frac{3}{2} \text{ или } 2 < x < +\infty.$$

2. $\dfrac{x - 4}{2x - 3} \leqslant 0.$

РЕШЕНИЕ. Дробь отрицательна в том случае, если ее числитель и знаменатель имеют значения разных знаков. Поэтому:

$$\frac{x-4}{2x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-4\geqslant 0, \\ 2x-3<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-4\leqslant 0, \\ 2x-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 4, \\ x<\dfrac{3}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant 4, \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решения нет}, \\ \dfrac{3}{2}<x\leqslant 4, \end{array}\right. \ \frac{3}{2}<x\leqslant 4.$$

---

* Рассматривающиеся в данном разделе неравенства являются частным случаем дробно-рациональных неравенств, числители и знаменатели которых представляют собой многочлены более высоких степеней относительно переменной x.

3. $\dfrac{3-6x}{2x+1} > -5.$

РЕШЕНИЕ.

$$\left(\frac{3-6x}{2x+1} > -5\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3-6x}{2x+1} + 5 > 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3-6x+10x+5}{2x+1} > 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x+8}{2x+1} > 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x+8>0, \\ 2x+1>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+8<0, \\ 2x+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-2, \\ x>-\frac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<-2, \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>-\frac{1}{2}, \\ x<-2, \end{array}\right. \qquad -\infty < x < -2 \text{ или } -\frac{1}{2} < x < +\infty.$$

5. Простейшие неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, необходимо использовать определение модуля

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

и равносильные преобразования

$$(|x| < a) \Leftrightarrow \begin{cases} x > -a, \\ x < a, \end{cases} \Leftrightarrow (-a < x < a). \tag{1.19}$$

Неравенства (1.19) графически представлены на рисунке 19. На рисунке 20 графически представлены равносильные преобразования

$$(|x| > a) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x > a \end{cases} \Leftrightarrow (x < -a \text{ или } x > a). \tag{1.20}$$

♦ ПРИМЕР 1

Решить неравенство 1) $|x-b| < a$; 2) $|x-b| > a$.

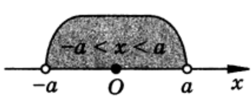


Рис. 19

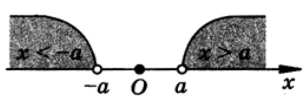


Рис. 20

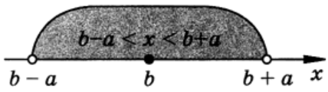


Рис. 21

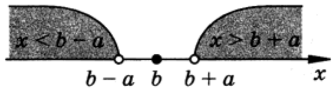


Рис. 22

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (1.19) имеем

$$|x-b|<a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-b>-a, \\ x-b<a \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x>b-a, \\ x<b+a \end{cases} \;\Leftrightarrow\; b-a<x<b+a.$$

Графически это решение представлено на рисунке 21.

2) По формуле (1.20) получаем:

$$(|x-b|>a) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-b<-a, \\ x-b>a \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x<b-a, \\ x>b+a \end{cases} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x<b-a \text{ или } x>b+a).$$

Данное решение графически представлено на рисунке 22.

♦ ПРИМЕР 2

Решить неравенство: 1) $|x|<3$; 2) $|x-3|>2$; 3) $|3x+8|<4$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (1.19) имеем

$$\begin{cases} x>-3, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow (-3<x<3).$$

2) По формуле (1.20)

$$\begin{cases} x-3<-2, \\ x-3>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>5, \end{cases} \qquad x<1 \text{ или } x>5.$$

3) По формуле (1.19) имеем

$$\begin{cases} 3x+8>-4, \\ 3x+8<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-12, \\ 3x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x<-\dfrac{4}{3}, \end{cases} \qquad -4<x<-\frac{4}{3}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется неравенством?
2. Какие выражения называются алгебраическими и какие числовыми неравенствами?
3. Что называется решением неравенства?
4. Какие неравенства называются равносильными?
5. Перечислите основные свойства неравенств.

6. Какие неравенства называются линейными?
7. Какие неравенства не имеют решения?
8. Какому неравенству удовлетворяет любое число?
9. В каких случаях решение неравенства сводится к решению совокупности неравенств?
10. Как записываются решения неравенств вида $|x| < a$ и $|x| > a$?

§ 7. Системы линейных уравнений

1. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решением системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2z = c_2 \end{cases}$$

будем называть пару чисел $(x_0;\ y_0)$, которая каждое уравнение этой системы обращает в верное числовое равенство.

Приведем различные способы решения подобных систем на примере следующей системы:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

I. Способ подстановки. Этот способ заключается в том, что из одного уравнения данной системы выражают какую-либо из переменных через другую переменную и найденное для этой переменной выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего получают уравнение с одной переменной.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y - 1}{4}, \\ 3 \cdot \dfrac{3y - 1}{4} + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y - 1}{4}, \\ 25y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot (3 - 1)}{4}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

II. Способ алгебраического сложения. Этот способ состоит в том, что все члены каждого из уравнений умножают на соответственно подобранные множители так, чтобы коэффициенты при одной и той же переменной в обоих уравнениях оказались противоположными числами, а затем уравнения почленно складывают, в результате чего получают уравнение, содержащее только одну переменную.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\ 3 \\ \cdot\ (-4) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9y = -3, \\ -12x - 16y = -72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y = -75, \\ 12x - 9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ 12x - 9 \cdot 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

III. Графический способ. Каждое из уравнений системы представляет собой линейную функцию, график которой прямая линия. Если эти прямые имеют общую точку пересечения, то координаты этой точки и будут корнями решения системы.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x + 1}{3}, \\ y = \dfrac{18 - 3x}{4}. \end{cases}$$

Прямая определяется двумя точками. Для построения первой прямой (рис. 23) возьмем точки $(-1; -1)$ и $(5; 7)$, для построения второй — точки $(-2; 6)$ и $(6; 0)$. Чтобы упростить построение графиков, следует подбирать такие точки, в которых обеим переменным соответствуют целые числа. Построенные прямые пересекаются в точке с координатами $(2; 3)$ — эти координаты являются корнями данной системы $x = 2$, $y = 3$.

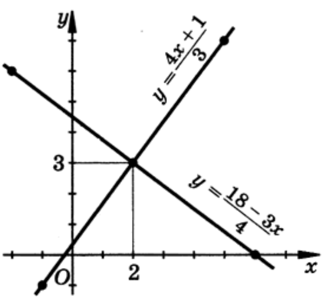


Рис. 23

Графический способ решения системы по сравнению с первыми двумя способами требует значительно большего времени, поэтому для решения систем уравнений он применяется редко. Преимуществом графического способа решения системы является его наглядность. Необходимо отметить, что некоторые уравнения можно решить только графическим способом.

2. Однородные и неоднородные, совместные и несовместные системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Если в системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2z = c_2 \end{cases}$$

оба свободных члена c_1 и c_2 равны нулю, то система называется ***однородной.*** Например, система

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ 7x + 5y = 0 \end{cases}$$

однородная, ее решение (0; 0).

Графический способ решения этой системы (рис. 24) также показывает, что прямые $3x - 2y = 0$ и $7x + 5y = 0$ пересекаются в начале координат, т. е. $x = 0$, $y = 0$.

Если хотя бы один из свободных членов c_1 или c_2 не равен нулю, то система называется ***неоднородной.*** Например, система

$$\begin{cases} x + 2y = 10, \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

неоднородная, ее решение (4; 3). Рисунок 25 иллюстрирует графический способ решения этой системы.

Система линейных уравнений, имеющая одно решение, называется ***совместной.*** Любая однородная система совместна.

Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной.*** Система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

не имеет решения, так как $3 \neq 0$, т. е. система несовместна. На рисунке 26 прямые $x + y = 3$ и $x + y = 0$ параллельны, следова-

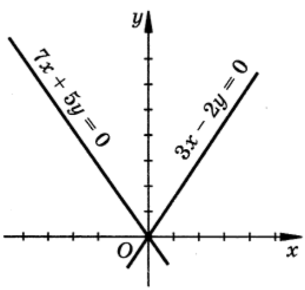


Рис. 24

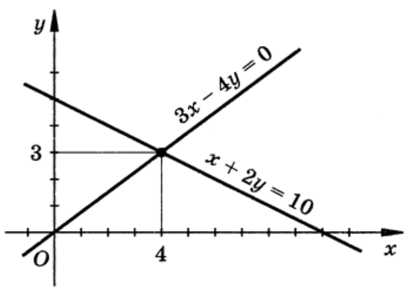


Рис. 25

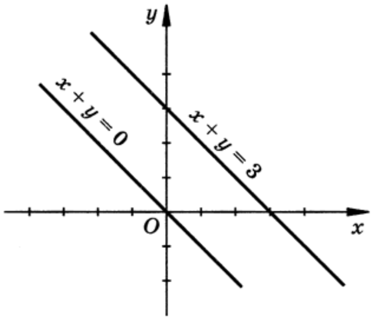


Рис. 26

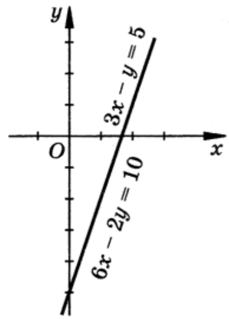


Рис. 27

тельно, не имеют общих точек, и данная система уравнений не имеет решения.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь бесконечное множество решений. Например, система

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, так как любое решение уравнения $3x - y = 5$ будет и решением уравнения $6x - 2y = 10$. На рисунке 27 прямые $3x - y = 5$ и $6x - 2y = 10$ совпадают, т. е. каждая точка первой прямой одновременно является и точкой второй прямой, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Таким образом, при решении системы линейных уравнений необходимо выяснить, является ли она совместной, и если она совместна, найти ее решение.

3. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными в общем виде. Решим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1.21}$$

в общем виде.

Исключим переменную y. Для этого умножим обе части первого уравнения системы на b_2, а второго — на $(-b_1)$ и, сложив соответствующие уравнения почленно, получим:

$$+\begin{array}{r} a_1b_2x + b_1b_2y = \ \ b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \\ \hline a_1b_2x - a_2b_1x = \ \ b_2c_1 - b_1c_2. \end{array}$$

В результате пришли к уравнению с одной переменной x:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2. \quad (1.22)$$

Чтобы исключить переменную x, умножим обе части первого уравнения (1.21) на $(-a_2)$, а второго — на a_1. Сложив их, получим:

$$+\begin{array}{l} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ \ \ a_1a_2x + a_1b_2y = \ \ a_1c_2 \\ \hline \ \ a_1b_2y - a_2b_1y = \ a_1c_2 - a_2c_1. \end{array}$$

Таким образом приходим к уравнению с одной переменной y:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \quad (1.23)$$

Из уравнений (1.22) и (1.23) образуем систему

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (1.24) имеет единственное решение:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (1.25)$$

Решение системы (1.24) является также и решением системы (1.21), что легко проверить подстановкой найденных значений (1.25) для x и y в систему (1.21).

Выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ называется ***определителем второго порядка*** и обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1.26)$$

Определитель (1.26), составленный из коэффициентов при переменных данной системы, называется ***определителем системы*** и обозначается знаком Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1.27)$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются ***элементами определителя***, причем элементы a_1 и b_2 образуют ***главную диагональ***, а элементы a_2 и b_1 — ***побочную диагональ***. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали, как это показано стрелками:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Аналогично составляются определители Δ_x и Δ_y, которые составляются из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующей переменной столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Система двух линейных уравнений с двумя переменными (1.21) совместна при условии, что определитель системы (1.27) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}. \qquad (1.28)$$

Формулы (1.28) называются ***формулами Крамера****.

Если определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_x = \Delta_y = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условие несовместности можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

а условие неопределенности — в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

---

* *Габриэль Крамер* [*Cramer*] (1704—1752) — швейцарский математик. Крамер установил правила решения системы n линейных уравнений с n переменными (правило Крамера) и заложил основы теории определителей.

Приведем примеры решения системы двух линейных уравнений с помощью определителей.

♦ ПРИМЕРЫ

Решить систему уравнений [1—3].

1. $\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) = 25$, система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам (1.28):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 18 & 4 \end{vmatrix}}{25} = \frac{(-1) \cdot 4 - 18(-3)}{25} = \frac{50}{25} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}}{25} = \frac{4 \cdot 18 - 3(-1)}{25} = \frac{75}{25} = 3.$$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 6x - 4y = 2. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. Находим $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 6(-2) = 0.$

Свободные члены пропорциональны коэффициентам при переменных: $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$. Поэтому данная система равносильна одному из уравнений, например первому, и следовательно, имеет бесконечное множество решений.

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 6y = 3. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. Определим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 4(-3) = 0.$

Здесь свободные члены не пропорциональны коэффициентам при переменных $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{2}{3}$; поэтому данная система несовместна, т. е. не имеет решения.

4. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{1.29}$$

Определителем третьего порядка, составленным из чисел a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, называется число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$

Формула (1.30) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Система (1.29) имеет единственное решение при условии, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Это решение находится по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \tag{1.31}$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Если же $\Delta = 0$, то система является либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, если система однородная, т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_2y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$$

и $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если определитель однородной системы $\Delta = 0$, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному (следствиями которого являются остальные два). В обоих случаях однородная система имеет бесконечное множество решений.

♦ ПРИМЕР

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32, \\ 5x + 2y + z = 11, \\ 2x - y + 3z = 14. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(6 + 1) + 3(15 - 2) + 5(-5 - 4) = 49 + 39 - 45 = 43;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} = 86;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} - 32\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = -43;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 129.$$

По формулам (1.28) получаем:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-43}{43} = -1; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{129}{43} = 3.$$

5. Решение систем трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса. ***Методом Гаусса*** является способ решения системы линейных уравнений путем последовательного исключения переменных и сведения ее к треугольной системе уравнений.

Подробно и последовательно изложим решение системы трех уравнений с тремя переменными методом Гаусса на примере системы уравнений (α — γ):

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, & (\alpha) \\ 3x - y + 5z = 2, & (\beta) \\ x - 2y + 4z = 3. & (\gamma) \end{cases}$$

1) Из данной системы получим уравнение, не содержащее x. Умножив уравнение (α) на 3 и (β) на (-2), получим:

$$\frac{2x - 4y + 3z = 1 \;|\cdot 3}{6x - 12y + 9z = 3;} \qquad (\delta)$$

$$\frac{3x - y + 5z = 2 \;|\cdot(-2)}{-6x + 2y - 10z = -4.} \qquad (\varepsilon)$$

2) Сложим полученные уравнения (δ) и (ε):

$$+\begin{array}{r} 6x - 12y + 9z = 3 \\ -6x + 2y - 10z = -4 \\ \hline -10y - z = -1. \end{array}$$

3) Из исходной системы получим уравнение, не содержащее x и y. Уравнение (γ) умножим на (-2):

$$\frac{x - 2y + 4z = 3 \;|\cdot(-2)}{-2x + 4y - 8z = -6} \qquad (\zeta)$$

4) Сложим уравнения (α) и (ζ):

$$+\begin{array}{r} 2x - 4y + 3z = 1 \\ -2x + 4y - 8z = -6 \\ \hline -5z = -5. \end{array}$$

5) Получена треугольная система

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, & (\eta) \\ -10y - z = -1, & (\vartheta) \\ -5z = -5. & (\kappa) \end{cases}$$

6) Из (κ) находим z: $z = 1$.
7) Из (ϑ) находим y: $-10y - 1 = -1$; $y = 0$.
8) Из (η) находим x: $2x - 0 + 3 = 1$; $x = -1$.
Ответ: $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

♦ ПРИМЕР

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8, \\ x + 7y - 5z = -9, \\ 4x + 2y - z = -12. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. **Имеем:**

1)
$$\frac{x + 7y - 5z = -9 \quad \Big|\cdot 2}{2x + 14y - 10z = -18;}$$

2)
$$+\begin{array}{r} -2x + 5y - 6z = -8 \\ 2x + 14y - 10z = -18 \\ \hline 19y - 16z = -26. \end{array} \qquad (\lambda)$$

3)
$$\frac{x + 7y - 5z = -9 \quad \Big|\cdot(-4)}{-4x - 28y + 20z = 36.}$$

4)
$$+\begin{array}{r} -4x - 28y + 20z = 36 \\ 4x + 2y - z = -12 \\ \hline -26y + 19z = 24. \end{array} \qquad (\mu)$$

Таким образом, получили два уравнения (λ) и (μ), содержащие y и z. Умножим (λ) на 26:

$$\frac{19y - 16z = -26 \quad \Big|\cdot 26}{494y - 416z = -676,} \qquad (\nu)$$

а (μ) на 19:

$$\frac{-26y + 19z = 24 \quad \Big|\cdot 19}{-494y + 361z = 456.} \qquad (\xi)$$

Сложив (ν) и (ξ), получим

$$+\begin{array}{r} 494y - 416z = -676 \\ -494y + 361z = 456 \\ \hline -55z = -220. \end{array}$$

5)
$$\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8, \\ 19y - 16z = -26, \\ -55z = -220. \end{cases}$$

6) $z = \dfrac{220}{55} = 4.$

7) $19y - 16 \cdot 4 = -26 \Rightarrow y = 2.$

8) $-2x + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = -8 \Rightarrow x = -3.$ **Ответ:** $x = -3,\ y = 2,\ z = 4.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие уравнения с двумя переменными называются линейными?
2. Как решаются системы двух линейных уравнений с двумя переменными способами подстановки, алгебраического сложения и графическим?

3. Какие системы двух линейных уравнений с двумя переменными называются однородными и неоднородными?
4. Какие системы двух линейных уравнений с двумя переменными называются совместными и несовместными? Приведите примеры.
5. Как графически изображаются решения совместной и несовместной систем двух линейных уравнений с двумя переменными?
6. Как графически изображается решение системы однородных линейных уравнений с двумя переменными?
7. Как графически изображается решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными, имеющей бесконечное множество решений?
8. Как решается в общем виде система двух линейных уравнений с двумя переменными?
9. Как составляется определитель второго порядка и каким знаком он обозначается?
10. Как составляются определители Δ_x и Δ_y?
11. Как записываются формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с помощью определителей?
12. При каком значении определителя Δ система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет одно решение?
13. Как записываются условия несовместности и неопределенности решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
14. Как записываются формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя переменными?
15. При каком значении определителя Δ система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет бесконечное множество решений?
16. Как решается система трех линейных уравнений с тремя переменными методом Гаусса?

§ 8. Квадратные уравнения

1. Квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$. Уравнение, в котором левая часть является многочленом второй степени относительно переменного x, а правая часть равна нулю, называется ***квадратным уравнением.***

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{1.32}$$

называется ***уравнением общего вида.***

Напомним вывод формулы корней квадратного уравнения общего вида:

$$(ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\right) \Leftrightarrow \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \Leftrightarrow \left(x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right);$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.33}$$

По формуле (1.33) легко вычисляются корни квадратного уравнения (1.32).

♦ ПРИМЕРЫ

Решить уравнение [1—2].

1. $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.33) имеем

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6};$$

$$x_1 = \frac{8 - 4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{8 + 4}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.32) находим

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2,\ x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

2. Исследование корней по дискриминанту. ***Дискриминантом квадратного уравнения*** называется подкоренное выражение в формуле (1.33):

$$D = b^2 - 4ac.$$

В зависимости от величины дискриминанта D рассмотрим три случая.

I. **$D > 0$.** В этом случае оба корня — числа действительные и разные.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение $5x^2 + 7x + 2 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$D = 7x^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9 \neq 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{-7 \pm 3}{10},$$

$$x_1 = \frac{-7-3}{10} = -1,\ x_2 = \frac{-7+3}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Корни x_1 и x_2 действительные и разные.

II. **$D = 0$.** В этом случае $x_{1,2} = -b/2a$. Оба корня действительные и равные.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение $9x^2 + 24x + 16 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Находим:

$$D = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576 - 576 = 0; \qquad x_{1,2} = -\frac{24}{2 \cdot 9} = -\frac{4}{3}.$$

Уравнение имеет два равных корня.

III. **$D < 0$.** В этом случае подкоренное выражение отрицательно и уравнение действительных корней не имеет. Оба корня — сопряженные комплексные числа.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Получаем:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Корни — сопряженные комплексные.

3. Приведенное квадратное уравнение. Если все члены уравнения (1.32) разделить на a ($a \neq 0$), получим

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Положив $\frac{b}{a} = p$ и $\frac{c}{a} = q$, придем к уравнению

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) называется ***приведенным*** в отличие от уравнения общего вида (1.32), которое называется ***неприведенным***.

Решим уравнение (1.34) по формуле (1.33):

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}} =$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Таким образом, получена формула для решения приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.35}$$

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение: 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$, 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.35)

1) $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$;

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2,\ x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

2) $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 8} = -3 \pm 1$;

$$x_1 = -3 - 1 = -4,\ x_2 = -3 + 1 = -2.$$

4. Решение квадратного уравнения (1.32) для случая, когда коэффициент *b* четное число (*b* = 2*k*). Уравнение (1.32) в этом случае принимает вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \tag{1.36}$$

Тогда по формуле (1.33)

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Получили формулу для случая четного $b = 2k$:

$$x_{1,\,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \tag{1.37}$$

использование формулы (1.37) упрощает вычисления.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение

1) $3x^2 - 8x + 4 = 0$; 2) $5x^2 - 26x - 24 = 0$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (1.37)

1) $x_{1,\,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 4}}{3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{3} = \dfrac{4 \pm 2}{3}$;

$$x_1 = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{4 + 2}{3} = 2.$$

2) $x_{1,\,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 + 5 \cdot 24}}{5} = \dfrac{13 \pm \sqrt{289}}{5} = \dfrac{13 \pm 17}{5}$;

$$x_1 = \frac{13 - 17}{5} = -\frac{4}{5},\ x_2 = \frac{13 + 17}{5} = 6.$$

5. Неполные квадратные уравнения. Квадратное уравнение (1.32) называется ***неполным***, если один из коэффициентов b или c или оба одновременно равны нулю. Если $b \neq 0$ и $c \neq 0$, уравнение (1.32) называется ***полным***.

Неполные квадратные уравнения могут быть трех видов:

$$ax^2 = 0, \quad ax^2 + c = 0, \quad ax^2 + bx = 0.$$

I. Уравнение $ax^2 = 0$ удовлетворяется только при $x = 0$. Таким образом, $x_1 = x_2 = 0$.

II. Уравнение $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению $x^2 = -c/a$ ($a \neq 0$). Если одновременно $a > 0$, $c > 0$ или $a < 0$, $c < 0$, уравнение действительных корней не имеет, так как x^2 не может быть отрицательным числом. В этом случае уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет два мнимых корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если a и c имеют разные знаки, то $-c/a$ будет положительным числом, и в этом случае уравнение имеет два действительных корня.

Например, уравнение $2x^2 + 8 = 0$ имеет два мнимых корня: $x_1 = -2i$, $x_2 = 2i$; уравнение $x^2 = 49$ имеет два действительных корня: $x_1 = -7$, $x_2 = 7$.

III. Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ равносильно уравнению $x(ax + b) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$. В этом случае один из корней всегда равен нулю.

Например, уравнение $3x^2 - 5x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$; уравнение $x^2 + 4x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$.

6. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета)*.

Теорема Виета устанавливает связь между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения.

■ ТЕОРЕМА ВИЕТА (ПРЯМАЯ)

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком, а их произведение равно свободному члену.

Иначе говоря, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q. \tag{1.38}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$x_1 + x_2 = -\left(\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -2 \cdot \frac{p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q,$$

что и требовалось доказать**.

---

* *Франсуа Виет, Вьет* [*Viète*] (1540—1603) — французский математик. Виет первым ввел в уравнениях обозначения неизвестных и коэффициентов при неизвестных буквами.

** Для полного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ соответствующая зависимость выражается следующим образом: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x = \frac{c}{a}$.

■ ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ВИЕТА

Если сумма каких-либо чисел x_1 и x_2 равна $(-p)$, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

♦ ПРИМЕР 1

Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Применяя выражения (1.38) к данному уравнению, получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 \cdot x_2 = 20. \end{cases}$$

Легко установить, что этой системе удовлетворяют только числа 4 и 5, т. е. $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

♦ ПРИМЕР 2

Составить квадратное уравнение, корни которого равны:

1) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$; 2) $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{5}{6}$.

РЕШЕНИЕ. По обратной теореме Виета имеем:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 + 4 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 4 = -8. \end{cases}$

Следовательно, заданным корням соответствует квадратное уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$;

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{19}{12}, \\ x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{8}. \end{cases}$

Таким образом, $x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{5}{8} = 0 \Leftrightarrow 24x^2 + 38x + 15 = 0$.

♦ ПРИМЕР 3

Найти знаки корней уравнения $15x^2 + x - 10 = 0$, не решая его.

РЕШЕНИЕ. Здесь $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$, так как $c < 0$. Следовательно, уравнение имеет два различных корня. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{15}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{10}{15}$. Произведение корней — отрицательное число, следовательно, корни имеют различные знаки. Сумма корней — отрицательное число, следовательно, больший по модулю корень отрицателен.

♦ ПРИМЕР 4

Найти знаки корней уравнения $5x^2 - x - 10 = 0$, не решая его.

РЕШЕНИЕ. Здесь $c < 0$, поэтому $D = b^2 - 4ac > 0$, и уравнение имеет два корня. По теореме Виета получим: $x_1 + x_2 = \frac{1}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{10}{5}$.

Произведение корней — величина отрицательная, следовательно, корни имеют разные знаки. Сумма корней — положительное число, поэтому положительным является больший по модулю корень.

7. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. ***Квадратным трехчленом*** называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$ или $x^2 + px + q$ при $a \neq 0$.

Корнями квадратного трехчлена называются те значения переменной x, при которых трехчлен обращается в нуль.

Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. В силу теоремы Виета имеем

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2),\ \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2,$$

следовательно,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) =$$
$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2).$$

Получили формулу разложения квадратного трехчлена на линейные множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{1.39}$$

♦ ПРИМЕР 1

Разложить на линейные множители квадратные трехчлены: 1) $9x^2 + 6x - 8$; 2) $-20x^2 + 7x + 6$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

1) Корнями трехчлена $9x^2 + 6x - 8$ являются $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, следовательно, по (1.39)

$$9x^2 + 6x - 8 = 9\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (3x + 4)(3x - 2).$$

2) Корни трехчлена $-20x^2 + 7x + 6$ равны $x_1 = -\frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, поэтому

$$-20x^2 + 7x + 6 = -20\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = -(5x + 2)(4x - 3) = = (5x + 2)(3 - 4x).$$

♦ ПРИМЕР 2

Сократить дробь: 1) $\frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + x - 15}$; 2) $\frac{4 - 3a - a^2}{3a^2 + 4a + 1}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Чтобы сократить дробь, ее числитель и знаменатель необходимо разложить на линейные множители по формуле (1.39):

$$\frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + x - 15} = \frac{2(x - 2)(x - 5/2)}{2(x + 3)(x - 5/2)} = \frac{x - 2}{x + 3}.$$

2) Аналогично

$$\frac{4 - 3a - a^2}{3a^2 + 4a + 1} = -\frac{a^2 + 3a - 4}{3a^2 + 4a + 1} = -\frac{(a + 1)(a - 4)}{3(a + 1)(a + 1/3)} = \frac{4 - a}{3a + 1}.$$

8. Биквадратные уравнения. Уравнение четвертой степени, содержащее только четные степени переменной, называется ***биквадратным***:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad (1.40)$$

Для решения биквадратного уравнения применим подстановку $x^2 = z$.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение $x^4 - 13x + 36 = 0$.

РЕШЕНИЕ. С помощью соответствующей подстановки получим уравнение $z^2 - 13z + 36 = 0$, корни которого равны $z_1 = 4$, $z_2 = 9$. Таким образом,

$$\begin{cases}(x_{1,2})^2 = 4,\\(x_{3,4})^2 = 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_{1,2} = \pm 2,\\x_{3,4} = \pm 3.\end{cases}$$

9. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители. Одним из основных методов решения алгебраических уравнений является метод разложения на множители. Его суть состоит в том, что в уравнении $F(x) = 0$ левую часть раскладывают на множители, т. е. представляют в виде $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, и, следовательно, заменяют данное уравнение равносильной ему совокупностью.

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{array}\right.$$

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение:

1) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$; 2) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$.

РЕШЕНИЕ. 1) Левая часть уравнения раскладывается на множители. Для нахождения корней исходного уравнения приравниваем каждый сомножитель нулю и решаем совокупность уравнений:

$$(x^3 - 2x^2 - 8x = 0) \Leftrightarrow (x(x^2 - 2x - 8) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \\ x = 4; \end{array}\right. \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4.$$

2) Разложим на множители левую часть уравнения и приравняем каждый сомножитель нулю. Решив совокупность уравнений, получим корни исходного уравнения:

$$(x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0) \Leftrightarrow (x^2(x - 5) - (x - 5) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x - 5)(x + 1)(x - 1) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = 0, \\ x + 1 = 0, \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -1, \\ x = 1; \end{array}\right. \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5.$$

10. Двучленные уравнения. Уравнения вида

$$ax^n + b = 0,$$

где a, b — действительные числа, причем $a \neq 0$, называются ***двучленными***. В общем случае они имеют n комплексных корней. В некоторых частных случаях такие уравнения могут быть решены методом разложения на множители.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение:

1) $x^4 - 16 = 0$; 2) $x^3 - 8 = 0$.

РЕШЕНИЕ.

$$1)\ (x^4 - 16 = 0) \Leftrightarrow ((x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0) \Leftrightarrow ((x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 0, \\ x - 2 = 0, \\ x^2 + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \\ \text{нет решения}; \end{array}\right. \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

2) $$(x^3 - 8 = 0) \Leftrightarrow ((x-2)(x^2+2x+4) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ \text{нет решения;} \end{array}\right. \qquad x = 2.$$

11. Дробно-рациональные уравнения с одной переменной. Каноническим видом ***дробно-рационального уравнения*** называется представление этого уравнения в виде

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = 0, \qquad (\alpha)$$

где коэффициенты a_n и b_m отличны от нуля.

Обычно при решении уравнения (α) его заменяют равносильной системой

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \\ b_m x^x + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0. \end{cases}$$

Затем корни первого уравнения подставляют в неравенство и отбрасывают те из них, которые этому неравенству не удовлетворяют.

♦ ПРИМЕРЫ.

Решить уравнение [1, 2].

1. $\dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{1}{3(3x-7)} - \dfrac{1}{x} = 0.$

РЕШЕНИЕ.

$$\left(\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{3(3x-7)} - \frac{1}{x} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3x(3x-7) - 2x(x-2) - 6(x-2)(3x-7)}{6x(x-2)(3x-7)} = 0\right), \\ 6x(x-2)(3x-7) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (11x^2 - 61x + 84 = 0), \\ 6x(x-2)(3x-7) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\dfrac{6}{11}, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ 6x(x-2)(3x-7) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\dfrac{6}{11}, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\dfrac{6}{11}, \\ x = 3; \end{array}\right. \qquad x_1 = 2\frac{6}{11},\ x_2 = 3.$$

2. $\dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{64}{x^2-16}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-4}{x+4} - \dfrac{64}{x^2-16} = 0, \\ (x-4)(x+4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ (x-4)(x+4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ (x-4)(x+4) \neq 0. \end{cases}$$

При $x = \pm 4$ обе части исходного уравнения не имеют смысла. Поэтому корни квадратного уравнения $x^2 - 16 = 0$ не являются корнями данного уравнения. Уравнение не имеет решений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое уравнение называется квадратным уравнением общего вида и какое приведенным квадратным уравнением?
2. Выведите формулу корней квадратного уравнения общего вида.
3. Какое выражение называется дискриминантом квадратного уравнения общего вида?
4. Как по дискриминанту определяется характер уравнения?
5. Какие уравнения называются неполными квадратными?
6. Приведите примеры неполных квадратных уравнений и укажите способы их решения.
7. Докажите теорему Виета о свойстве корней квадратного уравнения.
8. Приведите примеры решения квадратного уравнения с использованием теоремы Виета.
9. Как составляется квадратное уравнение по его корням?
10. Как можно найти знаки корней квадратного уравнения, не решая уравнения?
11. Какое выражение называется квадратным трехчленом и как находятся его корни?
12. По какой формуле квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители?
13. Какое уравнение называется биквадратным и как находятся его корни?
14. Какое уравнение называется двучленным и как находятся его корни?

§ 9. График квадратной функции. Графическое решение квадратного уравнения

1. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее частные случаи. Квадратной функцией (квадратным трехчленом) называется функция вида

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1.41}$$

где a, b и c действительные числа, $a \neq 0$. При $b = 0$ и $c = 0$ квадратная функция имеет вид

$$y = ax^2. \tag{1.42}$$

При $a = 1$ имеем квадратную функцию простейшего вида $y = x^2$. Построим по точкам график функции $y = x^2$ (рис. 28):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

График функции $y = ax^2 + bx + c$ (и ее частных случаев) называется ***параболой***. На рисунке 28 в точке (0; 0) парабола касается оси Ox. Эта точка называется ***вершиной параболы***, а ось Oy — ***осью симметрии параболы***.

Функция $y = x^2$ не изменяет своих значений при изменении знака аргумента: $(-x)^2 = x^2$. Такие функции называются ***четными***. Наименьшее значение функция имеет в точке (0; 0).

Далее построим на одном чертеже (рис. 29) графики функций $y = ax^2$ при $a = 1/2$; $a = 1$; $a = 2$; $a = -1/2$.

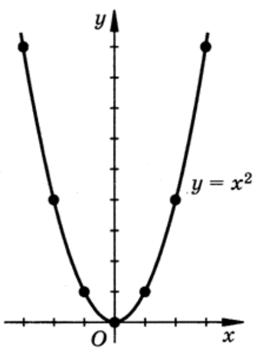


Рис. 28

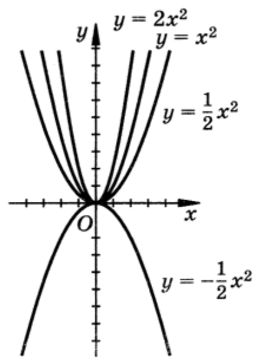


Рис. 29

Из построенных графиков видно, что при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ вниз, при a, большем по абсолютной величине, ветви парабол располагаются ближе к оси симметрии Oy.

Рассмотрим график функции вида $y = a(x - m)^2$, например, график функции $y = 2(x - 3)^2$, и сравним его с графиком функции $y = 2x^2$ (рис. 30). Вершиной параболы $y = 2x^2$ служит точка (0; 0), а осью симметрии — прямая $x = 0$. При смещении графика вправо по направлению оси Ox на 3 единицы точка с координатами (0; 0) переходит в точку с координатами (3; 0), а прямая $x = 0$ — в прямую $x = 3$. Поэтому вершиной параболы $y = 2(x - 3)^2$ является точка (3; 0), а осью симметрии — прямая $x = 3$. Так как $a = 2 > 0$, ветви параболы направлены вверх.

Из построения графика $y = 2(x - 3)^2$ следует, что он получен переносом графика $y = 2x^2$ по оси Ox вправо на 3 единицы.

График функции $y = a(x + m)^2$ при $m > 0$ можно получить смещением графика ax^2 влево на расстояние m. Ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. Вершина параболы находится в точке $(-m; 0)$, а осью симметрии служит прямая $x = -m$. На рисунке 31 представлен график функции $y = 2(x + 4)^2$. Построение здесь выполнено параллельным переносом графика $y = 2x^2$ влево на 4 единицы.

2. График функции $y = a(x - m)^2 + n$. График функции $y = a(x - m)^2 + n$ можно получить смещением параболы $y = a(x - m)^2$ по направле-

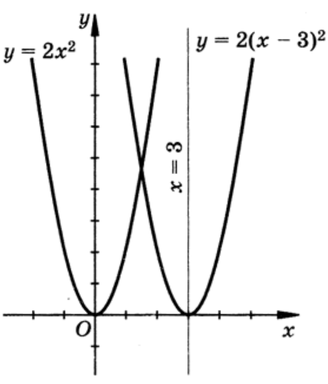


Рис. 30

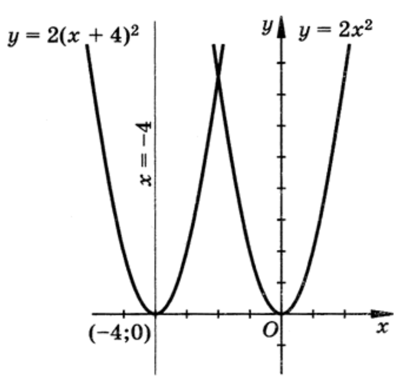


Рис. 31

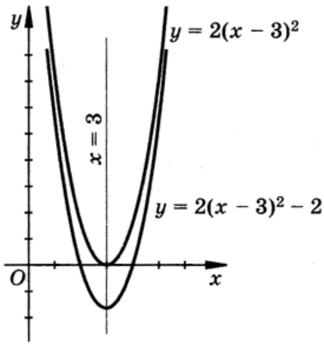


Рис. 32

нию оси симметрии вверх на расстояние n, если $n > 0$, и вниз на расстояние $-n$, если $n < 0$. Вершина этой параболы находится в точке $(m; n)$, а осью симметрии является прямая $x = m$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

На рисунке 32 изображен график функции $y = 2(x-3)^2 - 2$. Он получен из графика функции $y = 2(x-3)^2$ смещением его вниз на 2 единицы по оси симметрии.

3. График функции $y = ax^2 + bx + c$. Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене

$$y = ax^2 + bx + c,$$

получаем

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Это выражение имеет вид

$$y = a(x - m)^2 + n,$$

где $m = -b/2a$, $n = -(b^2 - 4ac)/4a$.

Отсюда следует, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ и с осью симметрии $x = -\frac{b}{2a}$.

При построении графика параболы $y = ax^2 + bx + c$ необходимо знать ее ***характеристические точки***: координаты вершины и точки пересечения параболы с осями координат.

4. Исследование и построение графика квадратной функции (квадратного трехчлена) $y = ax^2 + bx + c$. При построении графика квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$ могут представиться следующие случаи.

I. $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$. В этом случае ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Ордината вершины $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ ($b^2 - 4ac > 0$, $a > 0$), следовательно, вершины параболы расположены ниже оси Ox. Так как ордината любой точки оси Ox равна 0, при $y = 0$ имеем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. По условию дискриминант $b^2 - 4ac > 0$, поэтому уравнение имеет два действительных различных корня — абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox.
Функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее значение в вершине параболы $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Уравнение оси симметрии параболы имеет вид $x = -\frac{b}{2a}$.

Построим график функции $y = x^2 - 6x + 8$ (рис. 33). При $a = 1$ ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Находим координаты вершины параболы: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$; $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} - \frac{(-6)^2 - 4 \cdot 8}{4 \cdot 1} = -1$. Следовательно, вершина параболы (наименьшее значение функции $y = x^2 - 6x + 8$) находится в точке $(3; -1)$.

Ординату вершины можно вычислить и другим способом, для этого в функцию нужно подставить значение найденной абсциссы:

$$y_{x=3} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

Ось симметрии параболы проходит через вершину параболы, следовательно, уравнение оси: $x = 3$.

Для нахождения точек пересечения параболы с осью Ox решим уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$: его корни $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Находим точку пересечения параболы с осью Oy: при $x = 0$ получим $y = 8$.

Получили характеристические точки, по которым легко построить график функции.

II. $a > 0$; $b^2 - 4ac = 0$. Ветви параболы направлены вверх. Ордината вершины равна нулю ($b^2 - 4ac = 0$), поэтому вершина параболы лежит на оси Ox.
Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в этом случае имеет два равных корня.

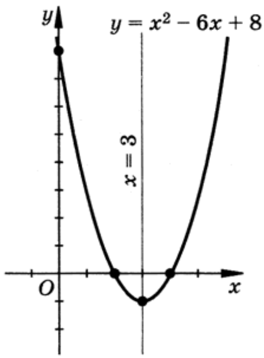


Рис. 33

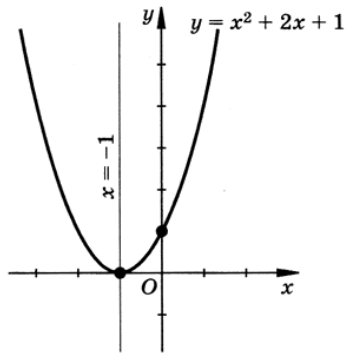


Рис. 34

Построим график функции $y = x^2 + 2x + 1$ (рис. 34). При $a = 1$ ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Находим вершину параболы:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1, \quad y_{x=-1} = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0.$$

Следовательно, вершина параболы находится в точке $(-1; 0)$.

Уравнение оси симметрии параболы: $x = -1$.

Корни уравнения $x^2 + 2x + 1 = 0$ равны: $x_{1,2} = -1$, т. е. график функции касается оси Ox в точке $(-1; 0)$. С осью Oy парабола пересекается в точке $(0; 1)$. По найденным характеристическим точкам строим график функции $y = x^2 + 2x + 1$.

III. $a > 0$; $b^2 - 4ac < 0$. Ветви параболы направлены вверх. Ордината вершины $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ ($b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$), следовательно, вершина расположена выше оси Ox и парабола с осью Ox не пересекается. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет.

Построим график функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ (рис. 35). При $a = 2$ ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Находим вершину параболы: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1$, $y_{x=1} = 2 \cdot 1^2 + 5 = 3$. Следовательно, вершина параболы находится в точке $(1; 3)$.

Уравнение оси симметрии параболы: $x = 1$.

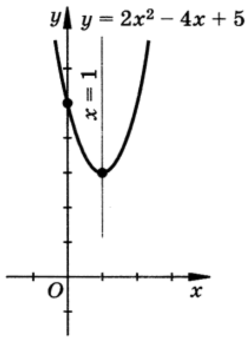


Рис. 35

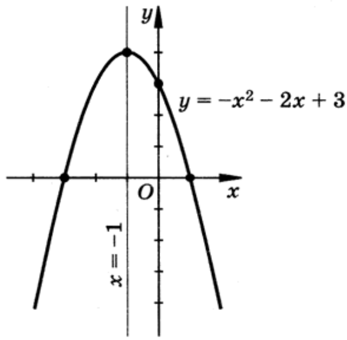


Рис. 36

Уравнение $2x^2 - 4x + 5 = 0$ действительных корней не имеет, так как дискриминант $((-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5) < 0$, поэтому точек пересечения с осью Ox парабола не имеет.

С осью Oy парабола пересекается в точке (0; 5). По характеристическим точкам строим параболу $y = 2x^2 - 4x + 5$.

IV. $a < 0$; $b^2 - 4ac > 0$. Ветви параболы направлены вниз ($a < 0$). Ордината вершины $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ ($b^2 - 4ac > 0$, $a < 0$). Следовательно, график пересекает ось Ox в двух точках x, так как уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня.

Построим график функции $y = -x^2 - 2x + 3$ (рис. 36). При $a = -1$ ($a < 0$) ветви параболы направлены вниз. Находим вершину параболы: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$; $y_{x=-1} = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = 4$. Следовательно, вершиной параболы является точка (−1; 4).

Уравнение оси симметрии параболы: $x = -1$.

Корни уравнения $-x^2 - 2x + 3 = 0$ или соответствующего ему $x^2 + 2x - 3 = 0$ равны $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.

С осью Oy парабола пересекается в точке (0; 3). По характеристическим точкам строим график функции $y = x^2 - 2x + 3$.

V. $a < 0$; $b^2 - 4ac = 0$. Ветви параболы направлены вниз. Ордината вершины $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два равных корня и, следовательно, график функции касается оси Ox в одной точке.

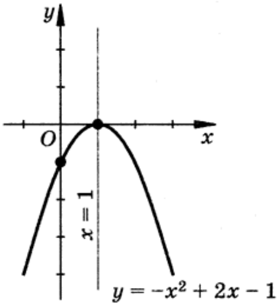


Рис. 37

Построим график функции $y = -x^2 + 2x - 1$ (рис. 37). При $a = -1$ ветви параболы направлены вниз. Находим вершину параболы: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$, $y_{x=1} = -1^2 + 2\cdot 1 - 1 = 0$, следовательно, вершина параболы находится в точке (1; 0).

Уравнение оси симметрии параболы $x = 1$.

Корни уравнения $-x^2 + 2x - 1 = 0$ равны $x_{1,2} = 1$, т. е. график функции касается оси Ox в точке $x = 1$.

Парабола пересекается с осью Oy в точке (0; −1). По характеристическим точкам строим график функции $y = -x^2 + 2x - 1$.

VI. $\boldsymbol{a < 0;\ b^2 - 4ac < 0}$. Ветви параболы направлены вниз. Ордината вершины $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ ($b^2 - 4ac < 0$, $a < 0$). Следовательно, вершина параболы лежит ниже оси Ox. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет. Поэтому парабола расположена ниже оси Ox и с ней не пересекается.

Построим график функции $y = -x^2 - 2x - 3$ (рис. 38).

При $a = -1$ ($a < 0$) ветви параболы направлены вниз. Находим координаты вершины: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1)} = -1$, $y_{x=-1} = -1 - 2\cdot(-1) - 3 = -2$.

Вершина параболы находится в точке (−1; −2).

Уравнение оси симметрии параболы $x = -1$.

Уравнение $-x^2 - 2x - 3 = 0$ действительных корней не имеет, и парабола с осью Ox не пересекается.

Парабола пересекается с осью Oy в точке (0; −3). По характеристическим точкам строим график функции $y = -x^2 - 2x - 3$ (рис. 38).

Установлено шесть возможных случаев исследования и построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

5. Графический способ решения квадратного уравнения. Квадратное уравнение графически можно решать двумя способами. Первый способ заключается в построении параболы $y = ax^2 + bx + c$ и нахождении корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ как абсцисс точек пересечения параболы с осью Ox. Как было установлено в п. 4 при исследовании графика квадратной функции, если парабола пересекает ось Ox в двух точках, соответствующее уравнение имеет два действительных корня, если касается оси Ox, то уравнение имеет два равных действительных корня, и если не пересекает оси Ox, то уравнение действительных корней не имеет.

Иначе можно уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ представить в виде $ax^2 = -bx - c$. Обозначив левую и правую части этого уравнения через y, получим две функции: квадратную и линейную: $y = ax^2$ и $y = -bx + c$. Корни этих функций должны быть одними и теми же. Следовательно, координаты точек пересечения этих графиков и будут корнями исходного уравнения. Построив на одном чертеже графики функций $y = ax^2$ и $y = -bx - c$, найдем координаты точек их пересечения. Если парабола $y = ax^2$ имеет две общие точки с прямой $y = -bx - c$, то уравнение имеет два действительных различных корня. Если эти графики имеют одну общую точку, то уравнение имеет два равных действительных корня, если общих точек они не имеют, то уравнение действительных корней не имеет.

Представим графическое решение квадратного уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ (рис. 39). Приведем уравнение к виду $x^2 = x + 6$. Построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$. Парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 6$ пересекаются в двух точках: $(-2; 4)$ и $(3; 9)$. Следовательно, корни уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ равны $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

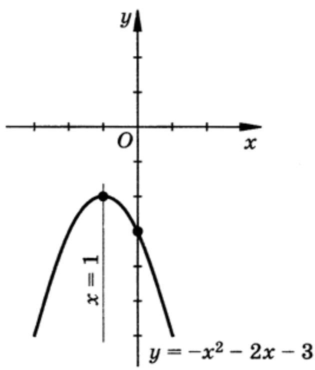


Рис. 38

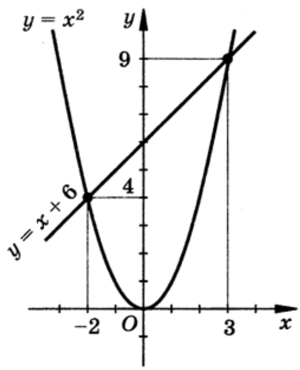


Рис. 39

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Приведите примеры частных случаев квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$. Как называется график квадратной функции?
2. При каких значениях коэффициента a ветви графика функции $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх (вниз)?
3. Как расположены ветви параболы по отношению к ее оси симметрии при различных значениях коэффициента a ($a > 1$, $0 < a < 1$)?
4. Как строится график функции $y = a(x - m)^2 + n$?
5. Как найти абсциссу вершины параболы, если она пересекается с осью Ox?
6. По каким формулам вычисляются координаты вершины любой параболы?
7. Какие точки графика функции $y = ax^2 + bx + c$ называются характеристическими?
8. Приведите шесть вариантов построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.
9. Укажите способы графического решения квадратного уравнения.

§ 10. Квадратные неравенства. Решение неравенств методом промежутков

1. Графическое решение квадратного неравенства. ***Квадратным*** называется ***неравенство***

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1.43}$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0. \tag{1.44}$$

Умножив обе части неравенства (1.44) на (-1), получим неравенство (1.43), поэтому достаточно изучить приемы решения неравенства (1.43). При решении квадратного неравенства будем исходить из построения графика квадратного трехчлена, т. е. параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Для решения неравенства (1.43) достаточно знать, при каких значениях аргумента x график трехчлена $ax^2 + bx + c$ находится в верхней полуплоскости. Результаты исследований квадратного трехчлена (§ 9) отвечают на этот вопрос.

Рассмотрим основные случаи решения квадратного неравенства.

I. Если $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac > 0$, то график квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ находится в верхней полуплоскости, кроме дуги, отсекаемой осью абсцисс.
Неравенство (1.43) справедливо при $x < x_1$ и при $x > x_2$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена и $x_1 < x_2$.

Рассмотрим более подробно подобное решение на примере неравенства $x^2 + 2x - 3 > 0$ (рис. 40).

Так как $a = 1$ ($a > 0$), ветви параболы $y = x^2 + 2x - 3$ направлены вверх. Дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$; $D > 0$, поэтому трехчлен $x^2 + 2x - 3$ имеет два действительных корня: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (в этих точках парабола пересекает ось Ox). Для построения параболы находим ее вершину: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$, $y_{x=-1} = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$, т. е. координаты вершины равны $(-1; -4)$. Уравнение оси симметрии параболы: $x = -1$. Точка пересечения параболы с осью Oy имеет координаты $(0; -3)$.

Таким образом, трехчлен $x^2 + 2x - 3$ имеет положительные значения в точках, лежащих выше оси Ox, т. е. исходное неравенство справедливо при

$$\left[\begin{array}{l} -\infty < x < -3, \\ 1 < x < +\infty. \end{array}\right.$$

II. Если $a > 0$ и $D = 0$, то график трехчлена находится в верхней полуплоскости за исключением точки касания с осью Ox.
Неравенство (1.43) справедливо при всех значениях x, кроме $x = -b/2a$.

Подобный вариант рассмотрим на примере неравенства $x^2 + 2x + 1 > 0$ (рис. 41).

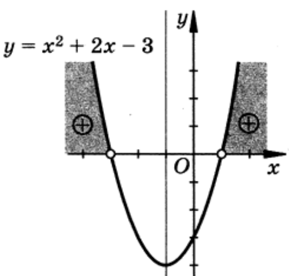


Рис. 40

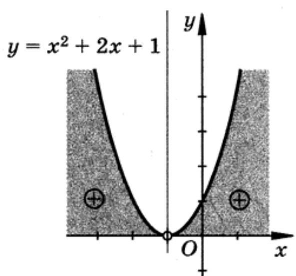


Рис. 41

При $a = 1$ ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, следовательно, трехчлен имеет два равных корня: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$. Таким образом, вершина параболы — точка ее касания с осью Ox $(-1; 0)$. Уравнение оси симметрии параболы: $x = -1$. С осью Oy парабола пересекается в точке $(0; 1)$.

Значение трехчлена $x^2 + 2x + 1$ положительно во всех точках, лежащих выше оси Ox, за исключением точки $(-1; 0)$. Поэтому

$$\begin{cases} -\infty < x < -1, \\ -1 < x < +\infty. \end{cases}$$

III. Если $a > 0$ и $D < 0$, то график трехчлена расположен в верхней полуплоскости и неравенство (1.43) справедливо при всех значениях x.

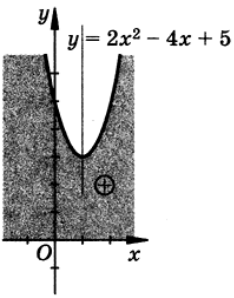


Рис. 42

Подобный случай рассмотрим на примере неравенства $2x^2 - 4x + 5 > 0$ (рис. 42).

При $a = 2$ ($a > 0$) ветви параболы направлены вверх. Дискриминант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$; $D < 0$; следовательно, трехчлен $2x^2 - 4x + 5$ действительных корней не имеет и парабола с осью Ox не пересекается. Находим вершину параболы: $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 1$, $y_{x=1} = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 3$; координаты вершины составляют $(1; 3)$. Уравнение оси симметрии: $x = 1$. Точка пересечения с осью Oy имеет координату $(0; 5)$.

Трехчлен является положительной величиной при всех значениях x, поэтому

$$-\infty < x < +\infty.$$

IV. Если $a < 0$ и $D > 0$, то в верхней полуплоскости содержится часть графика, ограниченная дугой параболы и осью Ox. Неравенство (1.43) справедливо при $x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена и $x_1 < x_2$.

Подобный случай отразим с помощью неравенства $-x^2 + 6x - 5 > 0$ (рис. 43).

При $a = -1$ ($a < 0$) ветви параболы направлены вниз. Дискриминант $D = 6^2 - 4 \cdot (-1)(-5)$; $D > 0$. Корни уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$

равны $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Координаты вершины параболы определяются как $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$, $y_{x=3} = -3^2 + 6\cdot3 - 5 = 4$, т. е. равны (3; 4). Уравнение оси симметрии: $x = 3$. Точка пересечения параболы с осью Oy имеет координаты (0; −5).

Значение трехчлена $-x^2 + 6x - 5$ является положительным во всех точках промежутка $1 < x < 5$.

V. Если $a < 0$ и $D = 0$, то график трехчлена расположен в нижней полуплоскости, кроме точки касания с осью Ox, поэтому неравенство (1.43) решения не имеет.

Подобный вариант представлен с помощью неравенства $-x^2 + 4x - 4 > 0$ (рис. 44).

При $a = -1$ ($a < 0$) ветви параболы направлены вниз. Дискриминант $D = 4^2 - 4(-1)(-4) = 0$, следовательно, парабола касается оси Ox в точке $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2$, т. е. координаты вершины параболы равны (2; 0). Уравнение оси симметрии параболы — $x = 2$. Точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0; −4).

Неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, но таких точек нет, следовательно, данное неравенство не имеет решения.

VI. Если $a < 0$ и $D < 0$, то график трехчлена лежит в нижней полуплоскости и неравенство (1.43) решений не имеет.

Соответствующий случай рассмотрим на примере неравенства $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ (рис. 45).

При $a = -2$ ($a < 0$) ветви параболы направлены вниз. Дискриминант $D = 4^2 - 4(-2)(-3)$; $D < 0$, следовательно, парабола не пересе-

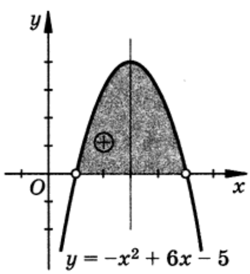


Рис. 43

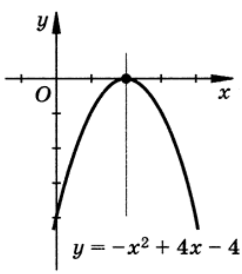


Рис. 44

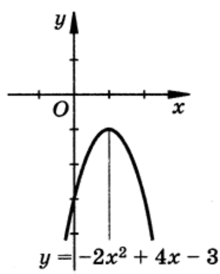


Рис. 45

кает ось Ox. Определяем вершину параболы: $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$, $y_{x=1} = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = -1$, т. е. координаты вершины равны $(1; -1)$. Уравнение оси симметрии параболы: $x = 1$. Точка пересечения параболы с осью Oy имеет координаты $(0; -3)$.

Неравенство $-2x^2 + 4x - 3 > 0$ выполняется только при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox, но таких точек нет. Данное неравенство решения не имеет.

2. Решение неравенств методом промежутков (интервалов). Если левую часть неравенства можно разложить на линейные множители, то его можно решить ***методом промежутков***.

Для нахождения промежутков знакопостоянства на числовой прямой отмечают все точки, в которых функция $P(x)$ обращается в нуль или претерпевает разрыв. Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция $P(x)$ сохраняет свой знак. Знак может измениться только при переходе через корни сомножителей.

На примере неравенства $(x + 3)(x - 2)(x - 5) > 0$ рассмотрим этот метод.

Многочлен $P(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$ обращается в нуль в точках $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 5$. Эти точки разбивают всю числовую прямую (рис. 46) на следующие промежутки: $-\infty < x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 5$, $5 < x < +\infty$.

Рассматривая промежутки справа налево, находим знак функции по знаку каждого из промежутков.

В промежутке $5 < x < +\infty$ выберем любое число, входящее в него, например $x = 6$, которое подставим в каждый из сомножителей многочлена $P(x)$, чтобы найти знак $P(x)$*.

При $x = 6$ имеем $\operatorname{sgn} P(x) = (+)(+)(+) = (+)$. Таким образом, при любом значении числа x, взятом из промежутка $5 < x < +\infty$, неравенство соблюдается, следовательно, любое число из этого промежутка является решением данного неравенства.

Далее рассмотрим промежуток $2 < x < 5$. Приняв, например, $x = 4$, получим $\operatorname{sgn} P(x) = (+)(+)(-) = (-)$. Следовательно, любое число из промежутка $2 < x < 5$ не является решением неравенства.

---

* Для обозначения знака некоторого выражения принято использовать термин sgn (от лат. *signum* — знак).

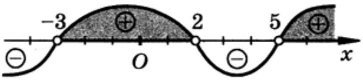


Рис. 46

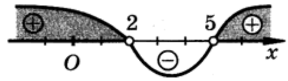


Рис. 47

Для промежутка $-3 < x < 2$ положим, например, $x = 0$, тогда $\operatorname{sgn} P(x) = (+)(-)(-) = (+)$. Следовательно, этот промежуток служит решением неравенства.

Для промежутка $-\infty < x < -3$ примем $x = -10$, тогда $\operatorname{sgn} P(x) = (-)(-)(-) = (-)$. Числа из этого промежутка не являются решениями неравенства. Таким образом, решением неравенства являются промежутки

$$\left[\begin{array}{l} -3 < x < 2, \\ 5 < x < +\infty. \end{array}\right.$$

Из решения видно, что знаки на числовой прямой чередуются, причем для всех значений x, расположенных правее самого большого корня, многочлен $P(x)$ будет положительным, и все сомножители будут также положительными. Поэтому при решении неравенств методом промежутков достаточно правый промежуток взять со знаком «+», остальные промежутки (справа налево) будут иметь чередующиеся знаки.

График на рисунке 47 иллюстрирует решение неравенства $x^2 - 7x + 10 > 0$. Данный трехчлен имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Эти корни отмечаем на числовой оси и строим кривую знаков. Так как $P(x) > 0$, решением неравенства являются промежутки $-\infty < x < 2$, $5 < x < +\infty$.

♦ ПРИМЕР

Решить неравенство: 1) $\dfrac{x+1}{x-2} > 3$; 2) $\dfrac{x-1}{x+3} < \dfrac{x+3}{x-1}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Путем преобразований получим

$$\left(\frac{-2x+7}{x-2} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2(x-7/2)}{x-2} < 0\right).$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\dfrac{(x-2)^2}{2}$, $x \neq 2$, придем к $(x-2)(x-7/2) < 0$. Точки $x = 2$ и $x = 7/2$ называются «выколотыми точками» и обозначаются обычно на графике (рис. 48) кружочком. Решением неравенства является промежуток $2 < x < 7/2$.

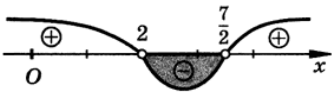


Рис. 48

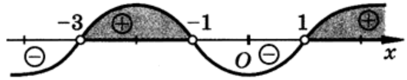


Рис. 49

2) Получаем

$$\left(\frac{(x-1)^2-(x+3)^2}{(x+3)(x-1)}<0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-8(x+1)^2}{(x+3)(x-1)}<0\right).$$

Умножив обе части последнего неравенства на $-\frac{(x+3)^2(x-1)^2}{8}$ $(x \neq -3,\ x \neq 1)$, получим $(x+3)(x+1)(x-1)>0$. На графике, представленном на рисунке 49, отмечены промежутки решения: $-3<x<-1,\ 1<x<+\infty$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие неравенства называются квадратными неравенствами?
2. Как решаются квадратные неравенства графическим способом?
3. Перечислите возможные варианты решения квадратных неравенств графическим способом.
4. При каком расположении графика квадратного трехчлена решением неравенства служит множество всех действительных чисел?
5. В каких случаях квадратное неравенство не имеет решения?
6. Какие неравенства можно решать методом промежутков?
7. Объясните с помощью примеров применение метода промежутков при решении неравенств.

§ 11. Иррациональные уравнения и иррациональные неравенства

1. Иррациональные уравнения. Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется ***иррациональным***.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению. Это достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения, так называемые посторонние корни.

Поэтому все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и посторонние корни отбрасывают.

Исходное иррациональное уравнение равносильно смешанной системе, состоящей из уравнения-следствия и ограничений, определяемых областью допустимых значений переменных. В этом случае посторонние корни не будут входить в область допустимых значений переменной, и проверять их подстановкой в исходное уравнение не требуется. При возведении обеих частей иррационального уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное данному.

♦ ПРИМЕР

Решить иррациональное уравнение: 1) $\sqrt{x^2 - 7} = 3$; 2) $\sqrt{x - 5} = \sqrt{3 - x}$; 3) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 1} = 5$; 4) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 2} = \dfrac{4}{\sqrt{x + 2}}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Возводим в квадрат: $(x^2 - 7 = 9) \Leftrightarrow (x^2 = 16) \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \pm 4$. Подставив полученные корни в исходное уравнение, видим, что они удовлетворяют ему.

2) Подкоренные выражения не должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} x - 5 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

Полученная система неравенств решения не имеет, не имеет их, таким образом, и исходное уравнение.

$$3) \begin{cases} (\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 1})^2 = 25, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x - 1)(2x - 1)} = 27 - 3x, \\ x \geqslant 1, \\ 27 - 3x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{(x - 1)(2x - 1)})^2 = (27 - 3x)^2, \\ x \geqslant 1, \\ x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 150x + 725 = 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 145, \end{array} \right. \\ 1 \leqslant x \leqslant 9. \end{cases}$$

Последней системе отвечает единственное решение $x = 5$.

$$4) \begin{cases} \sqrt{x(x + 2)} + x + 2 = 4, \\ x \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 4 - 4x + x^2, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Решение $x = 2/3$ удовлетворяет исходному уравнению.

2. Иррациональные неравенства с одной переменной. Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем иррациональных неравенств.

Простейшие иррациональные неравенства имеют вид:

$$\sqrt[n]{f(x)} > a, \quad \sqrt[n]{f(x)} < a, \quad \sqrt[n]{f(x)} < \varphi(x), \quad \sqrt[n]{f(x)} > \varphi(x),$$
$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)}, \quad \sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{\varphi(x)}.$$

Решение неравенства вида $\sqrt[2k]{f(x)} > a$ сводится к двум случаям:

1) если $a \geqslant 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) > a^{2k}$;

2) если $a \leqslant 0$, то решением исходного неравенства является пустое множество.

◈ ПРИМЕР

Решить неравенство: 1) $\sqrt{2x - 5} > 7$; 2) $\sqrt{5 - x} < -3$.

РЕШЕНИЕ. 1) $2x - 5 > 49$. Следовательно, $27 < x < +\infty$.

2) Решением неравенства $\sqrt{5 - x} < -3$ является пустое множество, так как ни при каком значении x корень четной степени не может быть отрицательным числом.

Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Например,

$$(\sqrt{x + 3} > x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 3 > x^2 + 2x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 < 0, \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x > -3, \\ x^2 + x - 2 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ -2 < x < 1, \end{cases} \\ -3 \leqslant x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x < 1, \\ -3 \leqslant x < -1. \end{array}\right.$$

Данной совокупности удовлетворяет $x \in [-3; 1)$.

Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$ равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < \varphi^2(x). \end{cases}$$

Например,

$$\left(\sqrt{3x+13} < x+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ 3x+13 \geqslant 0, \\ 3x+13 < x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant -\dfrac{13}{3}, \\ x^2 - x - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x < -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1, \\ x > 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решения}, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Таким образом, решением системы является $x \in (4; +\infty)$.

Решение неравенства $\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$ сводится к решению равносильной системы неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi(x). \end{cases}$$

Например,

$$\left(\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0, \\ 3-x \geqslant 0, \\ 2x+1 > 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x \leqslant 3, \\ x > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2}{3}, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

Полученной системе удовлетворяет $x \in (2/3; 3]$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие уравнения называются иррациональными?
2. В каких случаях появляются посторонние корни иррационального уравнения?
3. Каким способом может быть устранено появление посторонних корней иррационального уравнения?
4. Приведите примеры различных способов решения иррациональных неравенств.

§ 12. Нелинейные системы уравнений с двумя переменными

При решении систем уравнений используют правила, позволяющие преобразовать данную систему в равносильную ей.

I. Одно из уравнений системы можно заменить на равносильное.

II. Если одно из уравнений системы имеет вид $x = A$ (A — выражение, не содержащее x), то в остальных уравнениях системы можно заменить переменную x на ее выражение A.

III. Любое уравнение системы можно заменить на уравнение, получающееся при его сложении с любым другим уравнением системы.

IV. Любое уравнение системы можно умножить на выражение, не обращающееся в нуль.

♦ ПРИМЕР

Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{26}{5}, \\ x^2 - y^2 = 24. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ. 1) Складывая первое уравнение системы с удвоенным вторым, получаем:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 25, \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

2) Положим $z = \dfrac{x}{y}$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$). Тогда $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{26}{5}$, откуда $z_1 = 5$, $z_2 = \dfrac{1}{5}$. Таким образом, исходная система распадается на совокупность двух систем, каждая из которых решается способом подстановки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=5,\\ x^2-y^2=24,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{5},\\ x^2-y^2=24\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5y,\\ 24y^2=24,\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{y}{5},\\ -\dfrac{24y^2}{25}=24\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5y,\\ y_{1,2}=\pm1;\end{cases}\\ \text{нет решения.}\end{array}\right.$$

Таким образом, получаем два решения: ($x_1 = -5$, $y_1 = -1$) и ($x_2 = 5$, $y_2 = 1$).

§ 13. Простейшие задачи линейного программирования с двумя переменными

1. Общие понятия. Задачи, в которых отыскивается максимум или минимум некоторой функции при наличии ограничений на переменные, называются задачами ***математического программирования***.

Линейное программирование — это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции*, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Соответствующая функция называется ***функцией цели*** или ***линейной формой*** F.

Функция цели совместно с системой ограничений образует ***математическую модель*** рассматриваемой задачи.

Решение задачи линейного программирования состоит из трех этапов: 1) постановки задачи и составления ее математической модели; 2) выбора соответствующих методик (алгоритмов) для решения задачи и проведения вычислений по этим методикам; 3) интерпретации модели в исходных условиях.

Система ограничений сводится к m линейных уравнений или неравенств с n переменными, где $m < n$. Системы, в которых переменных больше, чем уравнений, называются неопределенными. Неопределенные системы приводятся к определенным (т. е. системам, содержащим столько уравнений, сколько имеется переменных) путем последовательного приравнивания к нулю соответствующего числа переменных.

---

* Линейной называется функция вида $y = ax + b$. Графиком линейной функции является прямая линия.

В системе из двух уравнений с тремя переменными можно получить три решения, приравнивая поочередно нулю x_1, x_2 и x_3. Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

имеет три решения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 7/3,\ x_3 = 13/3; \\ x_2 = 0,\ x_1 = 7,\ x_3 = 2; \\ x_3 = 0,\ x_2 = -2,\ x_1 = 13. \end{array}\right.$$

Математическое линейное программирование требует отобрать неотрицательные решения неопределенных систем линейных уравнений, при которых линейная форма принимает максимальное или минимальное значение.

♦ ПРИМЕР

Найти наибольшее значение линейной формы $Z = 2x_1 + x_2$ при следующих условиях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 16, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (\alpha)$$

РЕШЕНИЕ. Учитывая, что $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, строим прямые $3x_1 + x_2 = 9$ и $2x_1 + 4x_2 = 16$ только в I четверти (рис. 50). Множеством точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств (α), является выпуклый многоугольник $OAED$ (многоугольник решений). Вершины A, E и D многоугольника находим, решая системы уравнений:

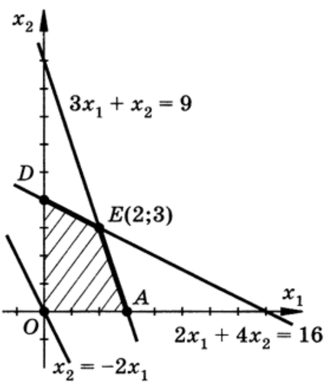


Рис. 50

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;\ 0);$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow E(2;\ 3);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0;\ 4).$$

Среди множества этих точек надо найти такие, в которых функция $Z = 2x_1 + x_2$ принимает наибольшее значение. Построим прямую $2x_1 + x_2 = 0$, т. е. $x_2 = -2x_1$. При увеличении Z эта прямая перемещается параллельно самой себе. Наибольшего значения Z достигает в одной из вершин многоугольника. Находим значения функции $Z = 2x_1 + x_2$ в вершинах многоугольника: $Z_0 = 0$, $Z_A = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6$, $Z_E = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$, $Z_D = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4$.

Таким образом, при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ функция $Z = 2x_1 + x_2$ достигает наибольшего значения $Z_{\max} = 7$.

2. Задача составления оптимального плана. Требуется составить план выпуска двух видов изделий на четырех участках цеха, чтобы получить максимальную прибыль от сдачи этих изделий. При этом накладываются следующие ограничения: время работы на участке I не превышает 16 ч, на участке II — 30 ч, на участке III — 16 ч и на участке IV — 12 ч.

Цеху начисляется прибыль: 3 тыс. р. при реализации одного изделия вида **M** и 4 тыс. р. при реализации одного изделия вида **N**.

В таблице указано время, необходимое для изготовления каждого из этих двух видов изделий на каждом из участков. Нуль означает, что изделие на данном участке не изготовляется:

Изделие	Участки			
	I	II	III	IV
M	4	3	0	2
N	2	6	4	0
Возможное время работы участка, ч	16	30	16	12

Обозначим через x_1 число изделий вида **M**, а через x_2 число изделий вида **N**.

На участке I затрачивается $4x_1$ часов на изготовление изделий вида **M** и $2x_2$ часов на изготовление изделий вида **N**, т. е. всего $4x_1 + 2x_2$ ч. Так как время работы на участке I не превышает 16 ч, то $4x_1 + 2x_2 \leqslant 16$.

На участке II затрачивается $3x_1$ часов на изделия вида **M** и $6x_2$ часов на изделия вида **N**, всего не более 30 ч, т. е. $3x_1 + 6x_2 \leqslant 30$.

На участке III затрачивается 0 часов на изделия вида **M** и $4x_2$ часов на изделия вида **N**, т. е. $4x_2 \leqslant 16$.

На участке IV затрачивается $2x_1$ часов на изделия вида **M** и 0 часов на изделия вида **N**, т. е. $2x_1 \leqslant 12$.

Общая прибыль цеха составляет $3x_1 + 4x_2$ тыс. р., где $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$.

Таким образом, ограничения сводятся к системе линейных неравенств

$$\{4x_1 + 2x_2 \leqslant 16,\ 3x_1 + 6x_2 \leqslant 30,\ 4x_2 \leqslant 16,\\ 2x_1 \leqslant 12,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}.$$

На множестве решений этой системы неравенств требуется найти наибольшее значение линейной формы $Z = 3x_1 + 4x_2$.

Построив прямые $4x_1 + 2x_2 = 16$, $3x_1 + 6x_2 = 30$, $4x_2 = 16$ и $2x_1 = 12$, получим замкнутый многоугольник $OABCD$ (рис. 51). Вычислим координаты его вершин:

$$\begin{cases} 2x_1 = 12, \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6;\ 0); \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 30, \\ 4x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow C(2;\ 4);$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow B(6;\ 2); \qquad \begin{cases} 4x_2 = 16, \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0;\ 4).$$

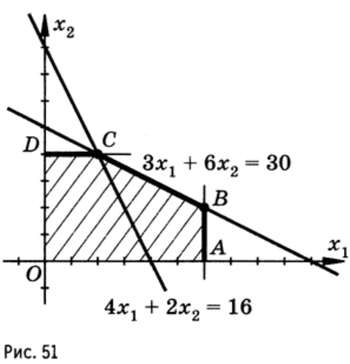


Рис. 51

Подставив координаты вершин в выражение линейной формы, получим: $Z_A = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 18$; $Z_B = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 26$; $Z_C = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$; $Z_D = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16$. В точке $B(6;\ 2)$ линейная форма достигает максимума: $Z_{max} = 26$.

Таким образом, наибольшая прибыль от сдачи двух видов изделий составляет 26 тыс. р. Она будет получена, если цех изготовит 6 изделий вида **M** и 2 изделия вида **N**.

ГЛАВА 2. Функции. Степенная, показательная и логарифмическая функции

§ 14. Функции и их основные свойства

1. Функции. Переменная y называется ***функцией*** переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.

Символически функциональная зависимость между переменной y (функцией) и переменной x (аргументом) записывается с помощью равенства $y = f(x)$, где f означает совокупность действий, которые надо произвести над x, чтобы получить y.

Числовое значение функции, соответствующее данному числовому значению аргумента, называется ***частным значением*** этой функции. Например, функция $y = f(x)$ при $x = a$ принимает значение $y = f(a)$.

Областью определения (существования) функции называется множество всех действительных значений аргумента, при которых она может иметь действительное значение.

Например, для функции $y = x$ областью определения является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$; для функции $y = \dfrac{1}{x}$ областью определения является множество $\boldsymbol{R}$ кроме $x = 0$.

Множеством значений функции называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Например, множеством значений функции $y = x + 1$ является множество $\boldsymbol{R}$, множеством значений функции $y = x^2 + 1$ является множество действительных чисел, бо́льших или равных 1.

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия, по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и ее область определения.

Функция может быть задана аналитически (формулой), таблицей, графиком или каким-либо другим способом.

♦ ПРИМЕР

Найти область определения функции: 1) $y = \sqrt{x} + x - 1$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

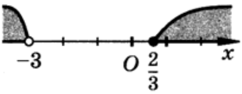


Рис. 52

РЕШЕНИЕ. 1) Областью определения данной функции является общая часть областей определения каждого из слагаемых. Для первого слагаемого $x \geqslant 0$, для второго $x \geqslant 1$. Областью определения функции служит промежуток $x \geqslant 1$.

2) Функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\frac{3x-2}{2x+6} \geqslant 0$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3}, \\ x > -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant \frac{2}{3}, \\ x < -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{2}{3}, \\ x < -3. \end{array}\right.$$

На рисунке 52 показаны области определения данной функции.

2. Четные и нечетные функции. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный значение функции не изменяется, т. е. $f(-x) = f(x)$. Например, парабола $y = x^2$ является четной функцией, так как $(-x)^2 = x^2$. График четной функции ***симметричен относительно оси Оу***.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если при всех значениях x в области определения этой функции при изменении знака аргумента на противоположный функция изменяется только по знаку, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = x^3$ — нечетная, так как $(-x)^3 = -x^3$. График нечетной функции ***симметричен относительно начала координат***.

Свойством четности или нечетности обладает не всякая функция. Например, функция $f(x) = x^2 + x^3$ не является ни четной, ни нечетной: $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$; $x^2 + x^3 \neq x^2 - x^3$.

♦ ПРИМЕР

Исследовать на четность и нечетность функцию: 1) $y = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$;

2) $y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 4}$; 3) $y = \frac{x^3 + 1}{4x^2 + 3}$, определенную на всей числовой оси.

РЕШЕНИЕ. Подставляем на место аргумента $(-x)$.

1) $\frac{3(-x)^4 - 2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$ — функция четная;

2) $\dfrac{(-x)^3-(-x)}{3(-x)^2+4}=\dfrac{-x^3+x}{3x^2+4}=-\dfrac{x^3-x}{3x^2+4}$ — функция нечетная;

3) $\dfrac{(-x)^3-(-x)}{4(-x)^2+3}=\dfrac{-x^3+1}{4x^2+3}$ — функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Возрастающие и убывающие функции. Среди множества функций есть функции, значения которых с увеличением аргумента только возрастают или только убывают. Такие функции называются ***возрастающими*** или ***убывающими***.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей в промежутке $a < x < b$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называются ***монотонными***, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, — ***промежутками монотонности***.

Например, функция $y = x^2$ при $x < 0$ монотонно убывает, а при $x > 0$ монотонно возрастает. Функция $y = x^3$ на всей числовой оси монотонно возрастает, а функция $y = -x^3$ на всей числовой оси монотонно убывает.

4. Обратная функция. Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при единственном значении x, то такую функцию называют ***обратимой***.

Например, функция $y = 3x + 5$ является обратимой, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Напротив, функция $y = 3x^2$ не является обратимой, поскольку, например, значение $y = 3$ она принимает и при $x = 1$, и при $x = -1$.

Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Это означает, что каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области ее определения такое, что $f(x) = y$. Решив это уравнение относительно x, получим уравнение $x = \varphi(y)$, в котором y является аргументом, а x — функцией этого аргумента. Поменяв местами в соответствии с принятыми обозначениями x и y, получим $y = \varphi(x)$.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$.

Областью определения обратной функции является множество значений исходной функции, а множеством значений обратной функции является область определения исходной функции.

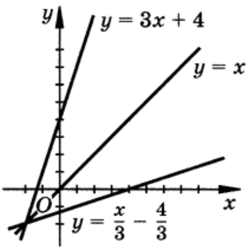


Рис. 53

График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов. Проиллюстрируем это на примере линейной функции $y = 3x + 4$ (рис. 53). Из исходной функции следует уравнение $x = (y - 4)/3$. Поменяв местами x и y, получим обратную функцию $y = (x - 4)/3$. Построив соответствующие графики, убеждаемся в их симметрии относительно прямой $y = x$.

Для всякой непрерывной функции (такой, которая не имеет точек разрыва) существует монотонная однозначная и непрерывная обратная функция.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулируйте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью изменения функции?
4. Какими способами может быть задана функция?
5. Как находится область определения функции?
6. Какие функции называются четными и как они исследуются на четность?
7. Какие функции называются нечетными и как они исследуются на нечетность?
8. Приведите примеры функций, которые не являются ни четными, ни нечетными.
9. Какие функции называются возрастающими? Приведите примеры.
10. Какие функции называются убывающими? Приведите примеры.
11. Какие функции называются обратными?
12. Как расположены графики прямой и обратной функций?

§ 15. Степенная функция

Функция вида $y = x^k$, где k — действительное число, называется ***степенной функцией*** с показателем k.

Свойства и график степенной функции существенным образом зависят от показателя степени k. Рассмотрим различные возможные варианты.

I. Показатель степени $k = 2n$ — четное натуральное число.

В этом случае областью определения функции $y = x^{2n}$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел; множеством значений — неотрицательные числа ($y \geqslant 0$); функция является четной ($(-x)^{2n} = x^{2n}$); функция — убывающая на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающая на промежутке $x \geqslant 0$.

На рисунке 54 приведены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

II. Показатель степени $k = 2n - 1$ — нечетное натуральное число.

Такая степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами: ее область определения — множество $\boldsymbol{R}$, множество значений — множество $\boldsymbol{R}$, функция является нечетной, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$; функция — возрастающая на всей действительной оси.

Графики, изображенные на рисунке 55, соответствуют функциям $y = x^3$ и $y = x^5$. (Отметим, что в частном случае при $n = 1$ получаем функцию $y = x$ с графиком биссектрисы первого и третьего квадрантов.)

III. Показатель степени $k = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае областью определения функции $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ является множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$; множеством значений — положительные числа $y > 0$; функция является четной, так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$; функция — возрастающая на промежутке $x < 0$ и убывающая на промежутке $x > 0$.

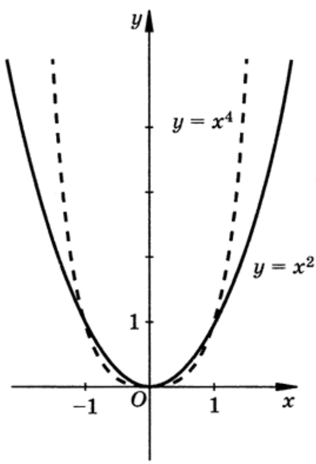


Рис. 54

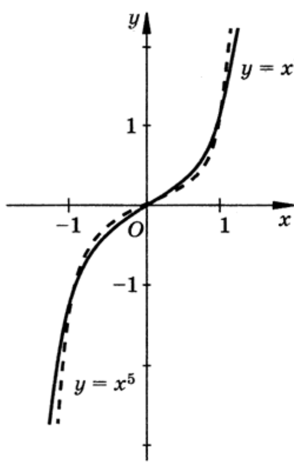


Рис. 55

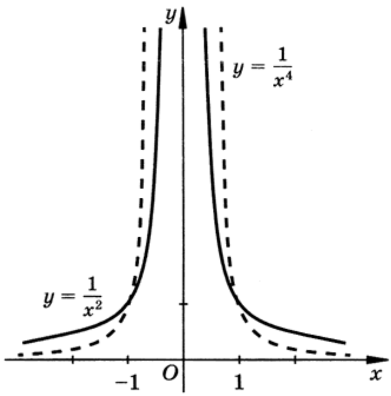


Рис. 56

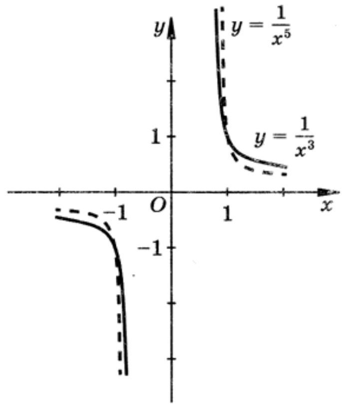


Рис. 57

На рисунке 56 представлены графики функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x^4}$.

IV. Показатель степени $k = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

Областью определения такой функции $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ является множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$; множеством ее значений — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $y = 0$; функция — нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$; функция является убывающей на промежутках $x < 0$, $x > 0$.

На рисунке 57 приведены графики функций $y = \frac{1}{x^3}$ и $y = \frac{1}{x^5}$.

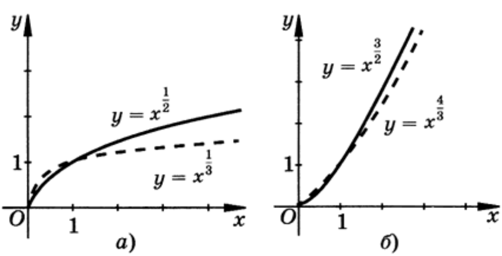


Рис. 58

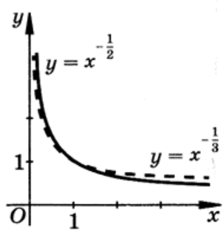


Рис. 59

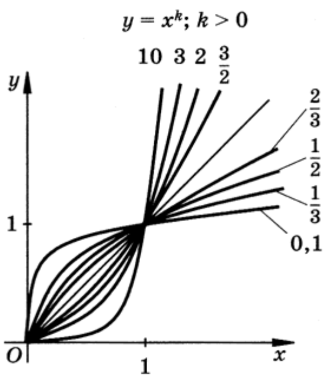


Рис. 60

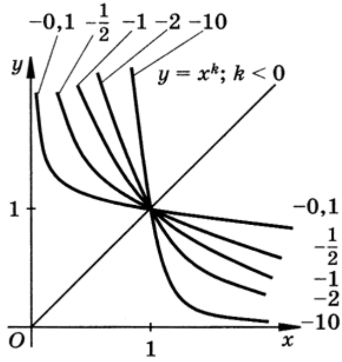


Рис. 61

V. Показатель степени k — положительное действительное нецелое число.

Областью определения такой функции являются неотрицательные числа $x \geqslant 0$, множеством значений — неотрицательные числа $y \geqslant 0$; функция — возрастающая на промежутке $x \geqslant 0$.

На рисунке 58, *а* представлены графики функций $y = x^{1/2}$ и $y = x^{1/3}$ (показатель $k < 1$), на рисунке 58, *б* — графики функций $y = x^{2/3}$ и $y = x^{4/3}$ (показатель $k > 1$).

VI. Показатель степени k — отрицательное действительное нецелое число.

Такая функция обладает следующими свойствами: область определения — положительные числа $x > 0$; множество значений — положительные числа $y > 0$; функция — убывающая на промежутке $x > 0$.

Этот случай проиллюстрирован графиками на рисунке 59: $y = x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}}$ и $y = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$.

На графиках рисунка 60 в I квадранте представлены кривые, соответствующие функциям $y = x^k$ при $k > 0$, на графиках рисунка 61 — при $k < 0$.

§ 16. Показательная функция

Основные свойства степени

Если $a > 0$, $b > 0$ и x, x_1, x_2 — любые действительные числа, то:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}; \qquad (2.1)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}; \qquad (2.2)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}; \qquad (2.3)$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \qquad (2.4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad (2.5)$$

$$a^x > 0; \qquad (2.6)$$

$$a^x > 1, \text{ если } a > 1,\ x > 0; \qquad (2.7)$$

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1,\ x_1 < x_2; \qquad (2.8)$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1,\ x_1 < x_2. \qquad (2.9)$$

Функция вида $y = a^x$, где основанием служит заданное число $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***показательной функцией***.

Область определения показательной функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

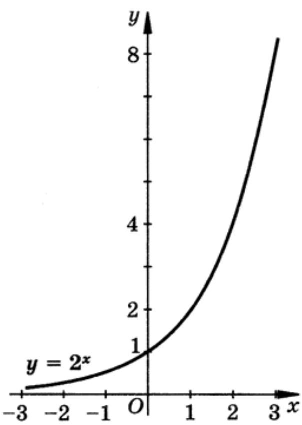


Рис. 62

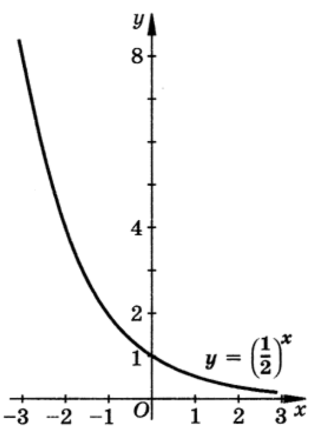


Рис. 63

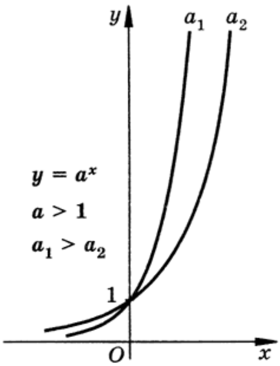


Рис. 64

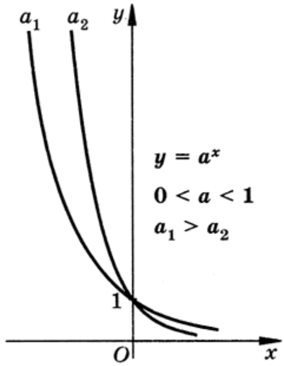


Рис. 65

Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел $y > 0$.

Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ на множестве всех действительных чисел и убывающей при $0 < a < 1$. Это следует из свойств (2.8—2.9).

Построим графики показательных функций $y = 2^x$ (рис. 62) и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 63) и перечислим их основные свойства.

График функции $y = 2^x$ проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x > 0$ и возрастает, график быстро поднимается вверх; если $x < 0$ и убывает, график быстро приближается к оси абсцисс, никогда не достигая нуля.

График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку (0; 1). Если $x > 0$ и возрастает, то график быстро приближается к оси абсцисс, никогда не достигая нуля; если $x < 0$ и убывает, то график быстро поднимается вверх.

Так же выглядят графики любых функций $y = a^x$ при $a > 1$ (рис. 64) и при $0 < a < 1$ (рис. 65).

§ 17. Логарифмическая функция

1. Понятие о логарифме числа. Задача определения показателя степени x в простом соотношении $2^x = 8$ оказывается неразрешимой с применением известных шести математических действий. Опре-

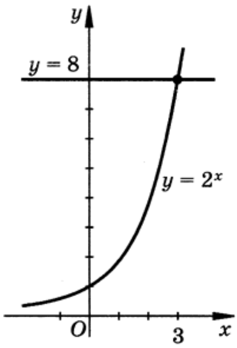


Рис. 66

делив тем не менее, что $x = 3$, записать решение этой задачи с помощью известных математических знаков невозможно.

Правда, эту задачу легко решить графическим способом нахождением точки пересечения графиков $y = 2^x$ и $y = 8$ (рис. 66); это точка (3; 8). Графический способ иногда позволяет решить задачу, неразрешимую с применением обычных математических приемов.

В общем виде задача $a^x = N$ разрешима только с введением нового математического действия. Это действие называется нахождением ***логарифма числа N по основанию a***, что записывается таким образом:

$$\log_a N = x. \tag{2.10}$$

> Логарифмом положительного числа N по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число N.

Например, $2^5 = 32$, поэтому $\log_2 32 = 5$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$, поэтому $\log_2 (1/8) = -3$; $5^0 = 1$, поэтому $\log_5 1 = 0$; $10^2 = 100$, поэтому $\log_{10} 100 = 2$; $a^1 = a$ ($a > 0$, $a \neq 1$), поэтому $\log_a a = 1$.

Подставим в выражение $a^x = N$ в качестве x его представление по (2.10). Тогда получим

$$\boxed{a^{\log_a N} = N.} \tag{2.11}$$

Это равенство называется ***основным логарифмическим тождеством***. Оно справедливо при $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Например,

$$2^{\log_2 8} = 8;\ 1/3^{\log_{1/3} 7} = 7;\ a^{-3\log_a x} = (a^{\log_a x})^{-3} = x^{-3}.$$

2. Свойства логарифмов. Рассмотрим некоторые свойства логарифмов, используемые при выполнении различных преобразований и решении уравнений.

Пусть $a > 0$, $M > 0$, $N > 0$, n — любое действительное число, тогда

$$\mathbf{\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;} \tag{2.13}$$

$$\log_a M^n = n \log_a M; \qquad (2.14)$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M. \qquad (2.15)$$

По основному логарифмическому тождеству (2.11) имеем

$$a^{\log_a M} = M, \qquad (2.16)$$

$$a^{\log_a N} = N. \qquad (2.17)$$

Перемножив равенства (2.16) и (2.17), получим

$$a^{\log_a M + \log_a N} = MN,$$

из чего по определению логарифма находим $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$, т. е. выражение (2.12) доказано.

Разделив равенство (2.16) на (2.17), получим

$$a^{\log_a M - \log_a N} = \frac{M}{N},$$

откуда по определению логарифма получим выражение (2.13).

Возведем основное логарифмическое тождество (2.11) в степень с показателем n, получим

$$a^{n \log_a M} = M^n,$$

из чего по определению логарифма получим выражение (2.14).

Наконец, (2.15) является частным случаем (2.14).

Отметим, что из условия $\log_a x = \log_a y$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ следует, что $x = y$, т. е. если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами числа.

3. Логарифмирование. Действие нахождения логарифма числа называют ***логарифмированием***. Если одночленное выражение составлено из положительных чисел с применением действий умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то логарифм такого выражения вычисляется с использованием формул (2.12—2.15).

Например, прологарифмируем по основанию 2 выражения $x_1 = 14^4 \cdot \sqrt[3]{40}$ и $x_2 = a^5(b^2 + 1)/(b^3 + 4)$ при $a > 0$, $b > 0$.

Имеем

$$\log_2 x_1 = 4 \log_2 14 + \frac{1}{3} \log_2 40,$$

$$\log_2 x_2 = 5 \log_2 a + \log_2 (b^2 + 1) - \log_2 (b^3 + 4).$$

4. Потенцирование. Действие, обратное логарифмированию, называется ***потенцированием.*** Этим действием с использованием формул (2.12—2.15) по логарифму выражения восстанавливается само выражение.

♦ ПРИМЕР

Определить x_1, x_2 и x_3, если:

$\log_3 x_1 = 3\log_3 12 + 4\log_3 26 - \log_3 19$,

$\log_2 x_2 = \frac{2}{3}\log_2 12 + \frac{1}{2}\log_2 14$,

$\log_3 x_3 = \log_3 a + 2\log_3 (a+b) - \log_3 (a-b) \quad (a > 0, b > 0, a > b)$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\log_3 x_1 = \log_3 \frac{12^3 \cdot 26^4}{19}\text{, следовательно, } x_1 = \frac{12^3 \cdot 26^4}{19};$$

$$\log_2 x_2 = \log_2\left(12^{2/3} \cdot 14^{1/2}\right)\text{, следовательно, } x_2 = 12^{2/3} \cdot 14^{1/2};$$

$$\log_3 x_3 = \log_3 \frac{a(a+b)^2}{a-b}\text{, следовательно, } x_3 = \frac{a(a+b)^2}{a-b}.$$

5. Десятичные и натуральные логарифмы. ***Десятичным логарифмом числа*** называется логарифм этого числа по основанию 10. Такой логарифм записывается следующим образом:

$$\lg a = \log_{10} a.$$

Десятичные логарифмы чисел, составляющих некоторую степень числа 10, легко вычисляются, например,

$$10^0 = 1, \qquad \lg 1 = 0,$$
$$10^1 = 10, \qquad \lg 10 = 1,$$
$$10^2 = 100, \qquad \lg 100 = 2,$$
$$10^{-1} = 0{,}1 \qquad \lg 0{,}1 = -1.$$

Логарифмы остальных чисел определяются либо с помощью таблиц, имеющихся в различных справочниках, в частности, в четырехзначных таблицах В. Брадиса (см. с. 38), либо с применением микрокалькуляторов. Например, по таблице находим, что $\lg 124 = 2{,}093$ — это означает, что $10^{2{,}093} \approx 124$.

Целая часть логарифма, в нашем примере число 2, называется ***характеристикой***, а дробная часть — ***мантиссой***.

Натуральным логарифмом числа называется логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближенно равное 2,718. Логарифм числа по основанию e записывается следующим образом: $\ln b = \log_e b$. Число e представляет собой сумму*:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Выведем соотношения, с помощью которых можно связать натуральные и десятичные логарифмы.

Пусть $N = 10^x$, $N = e^y$, тогда $x = \lg N$, $y = \ln N$. Очевидно, что тогда $10^x = e^y$. Прологарифмировав обе части этого равенства по основанию 10, получим

$$x \lg 10 = y \lg e \text{ или } x = y \lg e,$$

следовательно,

$$y = \frac{x}{\lg e},$$

поэтому

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}.$$

По таблице логарифмов можно определить $\lg e = 0{,}4343$; $\frac{1}{0{,}4343} = 2{,}303$, следовательно,

$$\mathbf{\ln N = 2{,}303 \lg N,}$$
$$\mathbf{\lg N = 0{,}4343 \ln N.}$$

6. Логарифмические тождества. Выведем формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию

$$\boxed{\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \log_a N.} \qquad (2.18)$$

Запишем основное логарифмическое тождество $N = b^{\log_b N}$. Прологарифмируем это тождество по основанию a:

$$\log_a N = \log_a b^{\log_b N}.$$

Используя свойства логарифма степени (2.14), получаем

$$\log_a N = \log_b N \log_a b,$$

из чего и следует (2.18).

---

* Более подробно о числе e будет сказано в § 43 п. 2.

Формула (2.18) при $a = 10$ и $a = e$ дает формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_b N = \frac{\lg N}{\lg b}; \qquad (2.19)$$

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}. \qquad (2.20)$$

Множитель $\frac{1}{\log_a b}$ в (2.18) называется ***модулем перевода*** от системы логарифмов с основанием a к системе с основанием b. В частном случае при $N = a$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \qquad (2.21)$$

так как $\log_a a = 1$.

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $x_1 = \log_{125} 5$; 2) $x_2 = \log_{1/16}(1/2)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (2.21) находим

$$x_1 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{1}{\log_{1/2}(1/16)} = 4.$$

Докажем тождество

$$\boxed{\log_{a^k} N = \frac{1}{k}\log_a N \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ k \neq 0,\ N > 0).} \qquad (2.22)$$

Из основного логарифмического тождества (2.11)

$$N = (a^k)^{\log_{a^k} N},$$

иначе

$$N = a^{k\log_{a^k} N}.$$

Прологарифмировав это равенство по основанию a, получим:

$$\log_a N = k \log_{a^k} N \log_a a = k \log_{a^k} N,$$

из чего и следует тождество (2.22).

Например, приведем $\log_{\sqrt{2}} x$ к основанию 2. По (2.22):

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{1/2}} x = 2 \log_2 x.$$

Любой логарифм можно представить в виде отношения двух логарифмов, взятых по одному и тому же основанию, т. е.

$$\frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0,\ M > 0). \qquad (2.23)$$

Из (2.18) следует, что

$$\log_M N = \frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M},$$

что и требовалось доказать.

Докажем тождество

$$\log_a N = \log_{a^m} N^m \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0). \qquad (2.24)$$

Пусть $\log_a N = n$, тогда $a^n = N$; возведем это равенство в степень m:

$$(a^n)^m = N^m \text{ или } (a^m)^n = N^m,$$

откуда $n = \log_{a^m} N^m$, из чего и следует (2.24).

Например, $\log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = \log_2 5$.

7. Логарифмическая функция, ее график и основные свойства. ***Логарифмической*** называется ***функция*** вида

$$y = \log_a x, \qquad (2.25)$$

где $a < 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны. Решив уравнение $y = \log_a x$ относительно x, получим $x = a^y$; поменяв местами x и y, придем к показательной функции $y = a^x$. Графики этих функций при $a = 2$ и $a = 1/2$ приведены на рисунках 67 и 68.

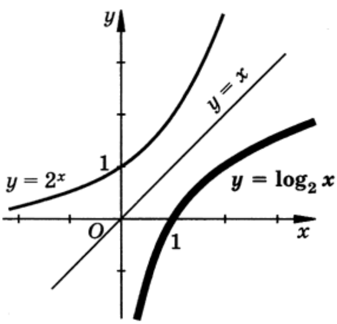


Рис. 67

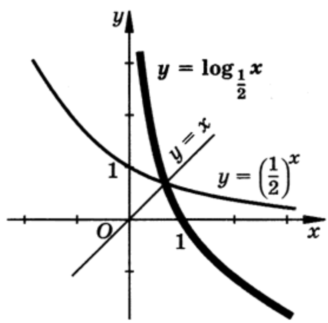


Рис. 68

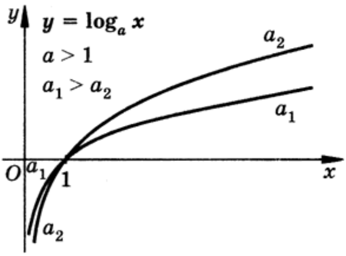


Рис. 69

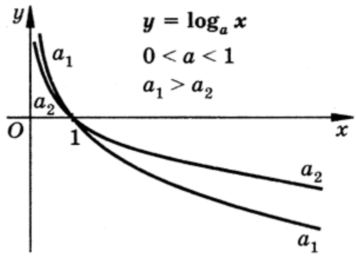


Рис. 70

Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

Множество значений логарифмической функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ на промежутке $x > 0$ при $a > 1$ монотонно возрастает и при $0 < a < 1$ монотонно убывает.

Если $a > 1$, логарифмическая функция на промежутке $0 < x < 1$ принимает отрицательные значения, а на промежутке $x > 1$ — положительные значения.

Если $0 < a < 1$, логарифмическая функция на промежутке $0 < x < 1$ принимает положительные значения, а на промежутке $x > 1$ — отрицательные значения.

График любой логарифмической функции расположен правее оси ординат и проходит через точку (1; 0).

На рисунке 69 приведены графики логарифмических функций с различными основаниями при основаниях $a > 1$, на рисунке 70 — при основаниях a, лежащих в пределах $0 < a < 1$.

♦ ПРИМЕР

Найти области определения функции: 1) $y = \log_7 |x|$; 2) $y = \log_4 (x^2 + x + 1)$; 3) $y = \log_3 (x + 6) + \log_{1/2}(6 - x)$.

РЕШЕНИЕ. 1) $x \neq 0$;

2) $x^2 + x + 1 > 0$, квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ действительных корней не имеет (см. § 10 п. 1), следовательно, $x \in \boldsymbol{R}$;

3) необходимо одновременное выполнение неравенств $(x + 6) > 0$ и $(6 - x) > 0$, следовательно, $-6 < x < 6$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Приведите определения степенной, показательной и логарифмической функций.

2. Приведите определение логарифма числа по данному основанию.
3. Как связаны между собой графики показательной и логарифмической функций?
4. Укажите области определения и области изменения показательной и логарифмической функций.
5. Перечислите основные свойства показательной функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.
6. Перечислите основные свойства логарифмической функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.
7. Сформулируйте основное логарифмическое тождество.
8. Перечислите основные свойства логарифмов.
9. Приведите доказательства логарифмических тождеств.

§ 18. Показательные уравнения. Системы показательных уравнений

1. Показательные уравнения. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным.***

При решении показательных уравнений вида

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

используется следующее свойство:

$$(a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}) \Leftrightarrow (f(x) = \varphi(x)).$$

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые из них.

I. **Способ уравнивания оснований.** Проиллюстрируем его на примере следующих уравнений: 1) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 128$; 2) $2^{x-2} = 5^{2-x}$.

1) Левую часть уравнения представим в виде

$$\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 8^{2x} = (2^3)^{2x},$$

правую — в виде $128 = 2^7$. Тогда $3 \cdot 2x = 7$, $x = 7/6$;

2) правую часть уравнения можно представить в виде $\frac{1}{5^{(x-2)}}$; умножая обе части уравнения на $5^{(x-2)}$, приходим к $2^{(x-2)} \cdot 5^{(x-2)} = 1$, иначе, $10^{(x-2)} = 1$, в то же время правую часть этого уравнения можно представить в виде $1 = 10^0$, отсюда $x - 2 = 0$, $x = 2$.

II. **Логарифмирование обеих частей уравнения. Применение основного логарифмического тождества.** Решим следующие уравнения: 1) $3^{2x-3} = 11^{1-x}$; 2) $3^x = 8$.

1) Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 10, получим $(3^{2x-3} = 11^{1-x}) \Leftrightarrow ((2x-3)\lg 3 = (1-x)\lg 11) \Leftrightarrow (2x \lg 3 - 3\lg 3 = \lg 11 - x\lg 11) \Leftrightarrow (2x\lg 3 + x\lg 11 = \lg 11 + 3\lg 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x(2\lg 3 + \lg 11) = \lg 11 + 3\lg 3\right) \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{\lg 11 + 3\lg 3}{2\lg 3 + \lg 11}\right)$.

2) Согласно основному логарифмическому тождеству (2.11) имеем $8 = 3^{\log_3 8}$, тогда $(3^x = 8) \Leftrightarrow (3^x = 3^{\log_3 8}) \Leftrightarrow x = \log_3 8$.

К этому результату можно прийти, логарифмируя обе части уравнения по основанию 3: $(3^x = 8) \Leftrightarrow (x \log_3 3 = \log_3 8) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = (\log_3 8)/(\log_3 3)$. Из последнего выражения согласно тождеству (2.23) следует $x = (\lg 8)/(\lg 3)$.

С использованием таблиц получим $x = \dfrac{0{,}903}{0{,}477}$; $x \approx 1{,}89$.

III. **Преобразование к квадратному уравнению.** Решим уравнения: 1) $5^x + \dfrac{125}{5^x} = 30$; 2) $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$.

1) Умножим все члены уравнения на 5^x:

$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$.

Решив это уравнение относительно 5^x, получим два корня:

$5^{x_1} = 5$, $5^{x_2} = 25$. Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

2) преобразовав второй член уравнения, получим $6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$. Разделив все члены уравнения на 3^{2x} (при этом $3^{2x} \neq 0$), получим относительно переменной $(2/3)^x$ квадратное уравнение $6 \cdot (2/3)^{2x} - 13 \cdot (2/3)^x + 6 = 0$.

Решив это уравнение, получим

$$(2/3)^{x_1} = 2/3,\ (2/3)^{x_2} = 3/2,$$

следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

IV. **Способ группировки.** Проиллюстрируем этот способ на примере решения уравнения

$$5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$(5 \cdot 25^x + 7 \cdot 7^x - 25^x \cdot 7^x - 35 = 0) \Leftrightarrow (25^x(5 - 7^x) - 7(5 - 7^x) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((5 - 7^x)(25^x - 7) = 0) \Leftrightarrow (5 - 7^{x_1} = 0,\ 25^{x_2} - 7 = 0).$$

Следовательно, $x_1 = \log_7 5$, $x_2 = \log_{25} 7$.

2. Системы показательных уравнений. Решение систем показательных уравнений основано на свойствах показательной и логарифмической функций. При этом часто используются метод подстановки и алгебраическое сложение. Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16, \\ 2 \cdot 3^x = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27, \\ 3^x + 3^y = 12. \end{cases}$

1) Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 3 \cdot 5^2, \\ 3^y \cdot 5^x = 3^2 \cdot 5. \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получим

$$(3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 3^3 \cdot 5^3) \Leftrightarrow (15^{x+y} = 15^3) \Leftrightarrow (x + y = 3).$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$(3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = 3^{-1} \cdot 5) \Leftrightarrow \left((3/5)^{x-y} = 3^{-1} \cdot 5\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((3/5)^{x-y} = (3/5)^{-1}\right) \Leftrightarrow (x - y = -1).$$

Решение данной системы сводится к решению равносильной ей системы

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1 \Leftrightarrow (x = 1,\ y = 2). \end{cases}$$

2) Прологарифмировав каждое из уравнений, получим:

$$\begin{cases} x \lg 4 + y \lg 5 = \lg 16, \\ \lg 2 + x \lg 3 = \lg 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \lg 2 + y \lg 5 = 4 \lg 2, \\ \lg 2 + x \lg 3 = \lg 2 + 2 \lg 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем: $x \lg 3 = 2 \lg 3$, т. е. $x = 2$. Подставив это значение x в первое уравнение, получим: $4 \lg 2 + y \lg 5 = 4 \lg 2$, следовательно, $y \lg 5 = 0$, т. е. $y = 0$.

Таким образом, решением системы является $(x = 2,\ y = 0)$. Этим же способом можно было решить и предыдущую систему.

3) Согласно свойствам корней квадратного уравнения (1.35), 3^x и 3^y служат корнями уравнения $z^2 - 12z + 27 = 0$. Решив последнее, находим $z_1 = 3$; $z_2 = 9$. Следовательно, $3^x = 3$, $x = 1$ и $3^y = 9$, $y = 2$ и, наоборот, $3^x = 9$, $x = 2$ и $3^y = 3$, $y = 1$. Итак, получаем два решения: $(x_1 = 1,\ y_1 = 2)$, $(x_2 = 2,\ y_2 = 1)$.

§ 19. Показательные неравенства

Неравенства вида $a^x > c$, $a^x < c$, $f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, называются ***простейшими показательными неравенствами.***

Имеют место следующие равносильные преобразования, вытекающие из свойств возрастания или убывания показательной функции:

$$a^x > c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > 1, \\ x > \log_a c; \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < \log_a c; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.26}$$

$$a^x > c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > 1, \\ x < \log_a c; \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > \log_a c; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.27}$$

$$f(x)^{\varphi_1(x)} > f(x)^{\varphi_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.28}$$

♦ ПРИМЕР

Решить неравенство:

1) $3^x > 4$;

2) $6^{x^2 - 7x + 12} > 1$;

3) $(x + 3)^{(x^2 - 5x + 6)} > 1$.

РЕШЕНИЕ. 1) Применив преобразование (2.26), получим $x > \log_3 4$.

2) Представив правую часть неравенства в виде $1 = 6^0$, получим $6^{x^2 - 7x + 12} > 6^0$, отсюда $x^2 - 7x + 12 > 0$. Следовательно, $x < 3$ или $x > 4$.

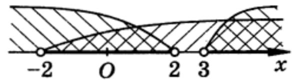


Рис. 71

3) Представим правую часть неравенства в виде $1 = (x + 3)^0$. Тогда, согласно (2.28), получим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>1,\\ x^2-5x+6>0;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x+3<1,\\ x^2-5x+6<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-2,\\ \left[\begin{array}{l}x<2,\\ x>3;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-3<x<-2,\\ 2<x<3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая из этих систем решения не имеет, а из первой следует

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-2,\\ x<2;\end{cases}\\ \begin{cases}x>-2,\\ x>3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение ($-2 < x < 2$ или $x > 3$) проиллюстрировано схемой, приведенной на рисунке 71.

§ 20. Логарифмические уравнения. Системы логарифмических уравнений

1. Логарифмические уравнения. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется ***логарифмическим***. Проиллюстрируем различные способы решения таких уравнений с помощью следующих примеров:

1) $\log_x 16 - \log_x 2 = 1/2$.

$$\begin{cases}\log_x(16/2)=1/2,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{1/2}=8,\\ x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Решением является $x = 64$.

2) $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5$.

Учитывая, что $1 = \lg 10$, потенцируем:

$$\begin{cases}\lg(x-3)+\lg(x-2)=\lg 10-\lg 5,\\ x-3>0,\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lg(x-3)\cdot(x-2)=\lg(10/5),\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(-2)=2,\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x+4=0,\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4,\end{array}\right.\\ x>3.\end{cases}$$

Данной системе удовлетворяет единственное решение $x = 4$.

3) $\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1.$

Данное уравнение преобразуем к квадратному, решив которое относительно переменной $\lg x$ (по 1.32), получим:

$$\begin{cases} \lg^2 x + 2\lg x + (1 - \lg^2 2) = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = -1 - \lg 2, \\ \lg x = -1 + \lg 2, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x + \lg 2 = -1, \\ \lg x - \lg 2 = -1, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg (2x) = -1, \\ \lg (x/2) = -1, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 10^{-1}, \\ x/2 = 10^{-1}. \end{array}\right.$$

Корнями исходного уравнения являются $x_1 = 0{,}05$ и $x_2 = 0{,}2$.

4) $x^{\lg x} = 100x.$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10 и решая затем полученное квадратное уравнение, находим

$$\begin{cases} \lg x \lg x = \lg 100 + \lg x, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x - \lg x - 2 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = -1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Исходному уравнению удовлетворяют корни $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 100$.

2. Системы логарифмических уравнений. Решение систем логарифмических уравнений основано на свойствах логарифмических функций.

Решим для примера систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - 3\log_x y = 2, \\ \log_2 x = 4 - \log_2 y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Здесь $x > 0$, $y > 0$. Имеем

$$\begin{cases} \log_y x - 3/\log_y x = 2, \\ \log_2 x = \log_2 16 - \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y^2 x - 2\log_y x - 3 = 0, \\ x = 16/y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_y x = -1, \\ \log_y x = 3, \end{array}\right. \\ x = 16/y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^{-1} = x, \\ y^3 = x, \end{array}\right. \\ x = 16/y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^{-1} = x, \\ x = 16/y; \end{cases} \\ \begin{cases} y^3 = x, \\ x = 16/y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решения}, \\ \begin{cases} x = 8, \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 2. \end{cases}$$

Решением исходного уравнения является (8; 2).

§ 21. Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a x > c$, $\log_a x < c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ называются ***простейшими логарифмическими неравенствами.***

При решении таких неравенств используют следующие преобразования:

$$\log_a x > c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x > a^c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < a^c; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.29}$$

$$\log_a x < c \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ 0 < x < a^c, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > a^c; \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.30}$$

$$\log_{f(x)} \varphi_1(x) > \log_{f(x)} \varphi_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi_1(x) > 0, \\ \varphi_2(x) > 0, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi_1(x) > \varphi_2(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi_1(x) < \varphi_2(x). \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{2.31}$$

Решим следующие неравенства: 1) $\log^2_{1/2} x > 36$; 2) $2 + \log_2 (x + 1) > 1 - \log_{1/2} (4 - x^2)$.

РЕШЕНИЕ. 1) Очевидно, что

$$(|\log_{1/2} x| > 6) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_{1/2} x > 6, \\ \log_{1/2} x < -6. \end{array}\right.$$

Используя равносильные преобразования (2.29) и (2.30), получаем

$$\left[\begin{array}{l} \log_{1/2} x > 6, \\ \log_{1/2} x < -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < (1/2)^6, \\ x > (1/2)^{-6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < (1/64), \\ x > 64. \end{array}\right.$$

Решение неравенства представлено схемой (рис. 72).

2) Имеем

$$\log_{1/2} (4 - x^2) = \frac{\log_2(4 - x^2)}{\log_2(1/2)} = \frac{\log_2(4 - x^2)}{-\log_2 2} = -\log_2 (4 - x^2).$$

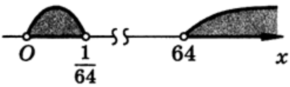


Рис. 72

Тогда, перенеся единицу в левую часть неравенства, получим

$$\left(1+\log_2(x+1)>\log_2(4-x^2)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\log_2 2+\log_2(x+1)>\log_2(4-x^2)\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\log_2 2(x+1)>\log_2(4-x^2)\right).$$

Используя далее равносильные преобразования (2.31), придем к системе

$$\begin{cases} x+1>0, \\ 4-x^2>0, \\ 2(x+1)>4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x^2-4<0, \\ x^2+2x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ -2<x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{3}-1, \\ x>\sqrt{3}-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{3}-1, \\ x>\sqrt{3}-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1<x<2, \\ x<-\sqrt{3}-1, \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<2, \\ x>\sqrt{3}-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решения}, \\ \sqrt{3}-1<x<2. \end{array}\right.$$

ГЛАВА 3. Тригонометрические функции

§ 22. Радианное измерение дуг и углов

1. Радианная мера дуги и угла. Известна градусная мера измерения углов и дуг: $1^\circ=\frac{1}{360}$ части длины окружности, $1^\circ=60'$, $1'=60''$.

В дальнейшем будем применять еще одну единицу измерения дуг и углов — ***радиан***.

Длины дуг l_1 и l_2 двух концентрических окружностей, соответствующих одному и тому же центральному углу, пропорциональны их радиусам R_1 и R_2 (рис. 73):

$$\frac{l_1}{R_1}=\frac{l_2}{R_2},$$

т. е. при одном и том же центральном угле отношение длины дуги окружности к ее радиусу не зависит от длины радиуса. При изменении центрального угла величина этого отношения изменяется. Поэтому отношение l/R может служить мерой дуги и соответствующего ей центрального угла.

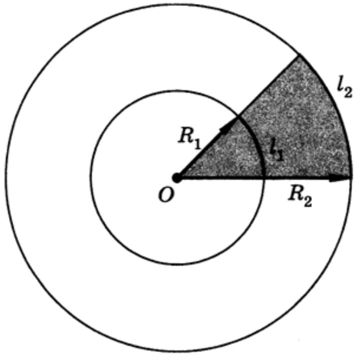


Рис. 73

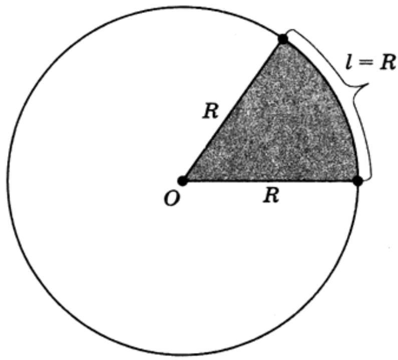


Рис. 74

Отношение длины дуги окружности l к длине ее радиуса R называется радианной мерой a этой дуги:

$$a = \frac{l}{R}. \qquad (3.1)$$

При радианном измерении дуг за единицу измерения принимается дуга, длина которой равна радиусу этой дуги. Эта ***дуга*** называется ***радианом*** (рис. 74).

При радианном измерении углов за единицу принимается центральный угол, опирающийся на дугу в один радиан. Такой угол также называется ***радианом.***

Число радиан в данной дуге (и в соответствующем ей центральном угле) является радианной мерой этой дуги (и соответствующего ей центрального угла).

Из формулы (3.1) следует, что окружность имеет радианную меру, равную 2π радиан

$$a = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Полуокружности соответствует π рад.

2. Формула перехода от градусного измерения к радианному. Пусть дуге в α градусов соответствует дуга, равная a радиан, тогда из пропорции

$$\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{a}$$

получим формулу перехода от градусного измерения к радианному:

$$a = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha. \qquad (3.2)$$

При $\alpha = 1°$ по формуле (3.2) получим радианную меру дуги в $1°$:

$$a = \frac{\pi}{180} \cdot 1° \approx 0{,}0175 \text{ (рад)}.$$

Приведем таблицу зависимости между градусной и радианной мерами для некоторых часто встречающихся дуг (углов):

Градусы	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

♦ ПРИМЕР

Найти радианную меру дуги, равной 210°.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.2) получаем $a = \frac{\pi}{180} \cdot 210° = \frac{7\pi}{6}$.

3. Формула перехода от радианного измерения к градусному. Из формулы (3.2), выражая дугу или угол α через a, получаем формулу перехода от радианного измерения к градусному:

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot a.$$

При $a = 1$ рад получим градусную меру одного радиана:

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot 1 = 57°17'44,''8 \approx 57,°3.$$

♦ ПРИМЕР

Найти градусную меру угла, равного $7\pi/4$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.3) получим $\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{4} = 315°$.

4. Длина дуги окружности. По формуле (3.1) находим

$$l = a \cdot R. \tag{3.4}$$

Длина дуги окружности равна радианной мере дуги, умноженной на радиус этой дуги.

При $R = 1$ длина дуги равна ее радианной мере. Это обстоятельство делает радианную меру весьма удобной для вычисления длин дуг.

♦ ПРИМЕР

Колесо радиуса $R = 0{,}35$ м повернулось на угол $\alpha = 72°36'$. Найти длину пути, пройденного точкой на ободе колеса.

РЕШЕНИЕ. Так как значение радиуса колеса дано с двумя значащими цифрами, по таблице Брадиса (см. с. 38) находим радианную меру $72°36'$, равную 1,27, с тремя значащими цифрами (одна цифра запасная). По формуле (3.1) находим

$$l = 0{,}35 \cdot 1{,}27 \approx 0{,}443 \approx 0{,}44 \text{ (м)}.$$

Формула для длины дуги, измеренной градусной мерой, имеет более громоздкую форму

$$l = \frac{2\pi R}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi R\alpha}{180°}. \qquad (3.5)$$

5. Площадь кругового сектора. Если центральный угол измеряется градусной мерой, то площадь сектора определяется выражением:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}. \qquad (3.6)$$

Если центральный угол измеряется в радианах, то, подставив в формулу (3.6) значение α из формулы (3.3), получим более простую формулу для вычисления площади сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \frac{180°}{\pi} a = \frac{1}{2} aR^2. \qquad (3.7)$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить площадь сектора круга радиуса 0,76 м, если радиальная мера дуги сектора равна 1,12 рад.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.7) находим

$$S_{\text{сект}} = \frac{1{,}12}{2} \cdot 0{,}76^2 \approx 0{,}56 \cdot 0{,}578 \approx 0{,}324 \approx 0{,}32 \text{ (м}^2\text{)}.$$

6. Линейная скорость при вращательном движении. Скорость любой точки твердого тела во вращательном движении называется ***линейной скоростью.***

Линейная скорость v при равномерном движении точки по окружности радиуса R выражается формулой

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \qquad (3.8)$$

где T — период вращения, т. е. время (в с), за которое совершается один полный оборот точки.

Зависимость линейной скорости v от радиуса R и числа оборотов n, совершаемых точкой в 1 с, выражается формулой

$$v = 2\pi Rn. \qquad (3.9)$$

Число оборотов n и период вращения T связаны соотношением

$$T = \frac{1}{n}. \qquad (3.10)$$

♦ ПРИМЕР 1

Колесо, радиус которого равен 0,45 м, в минуту совершает при равномерном вращении 120 оборотов. Найти линейную скорость точки, находящейся на ободе колеса.

РЕШЕНИЕ. Число оборотов колеса в секунду равно $n = 120/60 = 2$. По формуле (3.9) определяем линейную скорость точки на ободе колеса: $v = 2\pi \cdot 0{,}45 \cdot 2 = 1{,}8\pi$ (м/с).

♦ ПРИМЕР 2

Найти период вращения точки колеса, находящейся на расстоянии 0,61 м от его центра и вращающейся равномерно с линейной скоростью $v = 5{,}8$ м/с.

РЕШЕНИЕ. Из (3.8) находим период вращения T:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 0{,}61}{5{,}8} = 0{,}65 \text{ (с)}.$$

7. Угловая скорость при вращательном движении. Угол, на который поворачивается радиус любой точки равномерно вращающегося твердого тела за 1 с, называется ***угловой скоростью.*** Угловая скорость выражается в рад/с.

Угловая скорость ω и период вращения T связаны формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ рад/с}. \qquad (3.11)$$

Через число оборотов в секунду n угловая скорость ω выражается как

$$\omega = 2\pi n. \qquad (3.12)$$

Линейная скорость v точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения, и ее угловая скорость ω связаны соотношением

$$v = \omega R. \qquad (3.13)$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти угловую скорость и период вращения равномерно вращающегося вала, делающего 540 оборотов в минуту.

РЕШЕНИЕ. Число оборотов в секунду составляет $n = 540/60 = 9$. Подставляем это значение в (3.12):

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 9 = 18\pi \text{ рад/с}.$$

По (3.10) получаем $T = 1/9$ (с).

♦ ПРИМЕР 2

Найти угловую скорость равномерно вращающегося колеса с радиусом 0,81 м, если линейная скорость точки на его окружности равна 324 м/с.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.13)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{324}{0{,}81} = 400 \text{ (рад/с)}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие величины принимаются за единицу при градусном и радианном измерении дуг (углов)?
2. При решении каких задач удобнее применять радианное измерение дуг (углов) по сравнению с градусным?
3. Выведите формулы перехода от градусного изменения к радианному и от радианного к градусному.
4. Чему равна градусная мера дуги в 1 рад?
5. Чему равна радианная мера дуги в 1°?
6. По какой формуле вычисляется длина дуги, измеренная в радианах?
7. По какой формуле вычисляется площадь сектора, центральный угол которого измерен в радианах?

§ 23. Обобщение понятия дуги (угла)

1. Единичный круг и единичная окружность. В прямоугольной системе координат xOy построим круг с центром в начале координат и с радиусом, равным 1. Будем называть этот круг ***единичным кругом***, а его окружность — ***единичной окружностью***.

Точку пересечения $A(1;\ 0)$ единичной окружности с осью Ox примем за начало отсчета дуг, а положительную полуось Ox — за начальную сторону центрального угла, образуемого подвижным ***радиусом-вектором*** $\overrightarrow{OM}$* с осью Ox (рис. 75).

* Радиусом-вектором называется вектор, направленный из начала координат в произвольную точку плоскости.

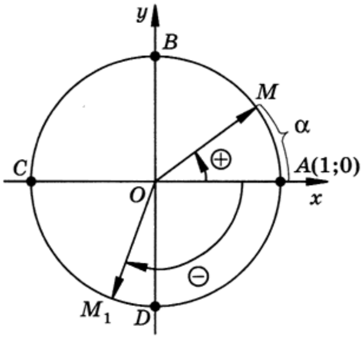


Рис. 75

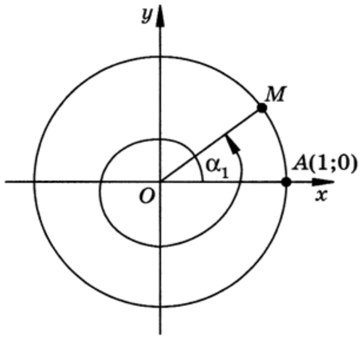


Рис. 76

2. Положительные и отрицательные дуги и углы. Вращение радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительной полуоси Ox против движения часовой стрелки назовем положительным, а дугу $\cup AM = \alpha$, образуемую концом радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, и соответствующий этой дуге центральный угол $\angle AOM$ — также положительными. Вращение радиуса-вектора OM от положительной полуоси Ox по часовой стрелке назовем отрицательным, а дугу $\cup AOM_1$, образуемую концом радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, и соответствующий центральный угол $\angle AOM_1$ — отрицательными.

Если отсчет дуг вести против движения часовой стрелки, то дуги равны $\cup AB = \pi/2$, $\cup ABC = \pi$, $\cup ABD = 3\pi/2$ и $\cup ABA = 2\pi$. Если отсчет дуг вести по часовой стрелке, то дуги $\cup AD = -\pi/2$, $\cup ADC = -\pi$, $\cup ADB = -3\pi/2$ и $\cup ADA = -2\pi$.

Дуга, равная нулю (нулевая дуга), имеет совпадающие точки A и M. Центральный угол равен нулю, если радиусы-векторы OA и OM совпадают.

3. Дуги и углы, бóльшие 2π (360°). Во многих задачах приходится рассматривать вращения, большие полного оборота (например, вращение колеса). Поэтому понятие дуги́ (угла) необходимо обобщить: ввести ду́ги (углы), большие полного оборота (большие 2π). Пусть точка M (конец радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$), вращаясь в положительном направлении от начала отсчета дуг — точки A, совершила один полный оборот, а затем описала дугу $\cup AM = \alpha_1$ (рис. 76). Тогда общая дуга α, которую описала точка M (угол, на который

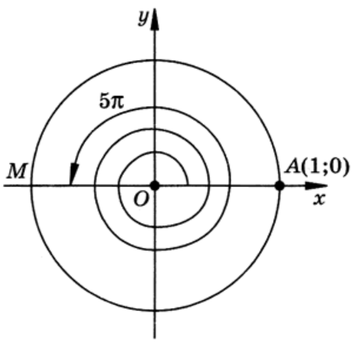


Рис. 77

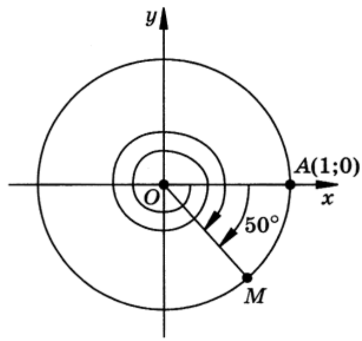


Рис. 78

повернулся радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$), составляет $\alpha = 2\pi + \alpha_1$, где $0 < \alpha_1 < 2\pi$ (в градусной мере $\alpha = 360° + \alpha_1$).

Существует бесконечное множество дуг (углов), имеющих данное начало A и данный конец M (данные начальную и конечную сторону угла).

Множество этих дуг (углов) как положительных, так и отрицательных можно выразить общей формулой

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi k \quad (0 < \alpha_1 < 2\pi), \tag{3.14}$$

где $k \in \mathbf{Z}$ (множеству целых чисел).

В градусном выражении (3.14) модифицируется в

$$\alpha = \alpha_1 + 360° \cdot k \quad (0 < \alpha_1 < 360°). \tag{3.15}$$

♦ ПРИМЕР 1

Указать на единичной окружности точку M дуги $\cup AM = 5\pi$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.14) получим $5\pi = 2\pi \cdot 2 + \pi$. Конец дуги $\cup AM$ отмечен на рисунке 77.

♦ ПРИМЕР 2

Указать на единичной окружности точку, соответствующую углу $\alpha = -770°$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.15) $\alpha = -(360° \cdot 2 + 50°)$. Соответствующий угол изображен на рисунке 78.

♦ ПРИМЕР 3

Выразить в общем виде дуги единичной окружности: 1) абсциссы концов которых равны нулю; 2) ординаты концов которых равны нулю.

РЕШЕНИЕ. Концы дуг $\pi/2$ и $3\pi/2$ имеют абсциссы, равные нулю, следовательно, множество концов дуг с абсциссой, равной нулю, выразится формулой $\pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Концы дуг 0 и π имеют ординаты, равные нулю, следовательно, множество концов дуг с ординатой, равной нулю, соответствует πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Единичная числовая окружность. Пусть каждому действительному числу α на единичной окружности соответствует точка $M(\alpha)$ — конец дуги $\cup AM$, для которой $\cup AM$ имеет величину α.

Такую единичную окружность будем называть ***числовой единичной окружностью***. Для числовой единичной окружности должны быть заданы: начало отсчета A, положительное направление движения и единица измерения дуг — радиус этой окружности, равный единице.

Длина всей числовой единичной окружности равна 2π. Поэтому, если два числа отличаются друг от друга на целое, кратное 2π, то им на числовой единичной окружности будет соответствовать одна и та же точка. Если два числа соответствуют одной и той же точке числовой единичной окружности, то их разность будет кратной 2π.

Установим соответствие между точками числовой оси и точками числовой единичной окружности. Каждому действительному числу на числовой оси соответствует точка $P(\alpha)$ (рис. 79), причем каждой точке числовой оси соответствует одна и только одна точка числовой окружности. Это соответствие можно представить «наматыванием» в положительном или отрицательном направлениях числовой оси на числовую единичную окружность, причем наматывание начинается от их общих нулевых точек (нуля на числовой оси и точки A на числовой единичной окружности). В то же время каждой точке числовой окружности на числовой оси соответствует не одна, а бесконечное множество точек числовой оси, что можно установить качением числовой единичной ок-

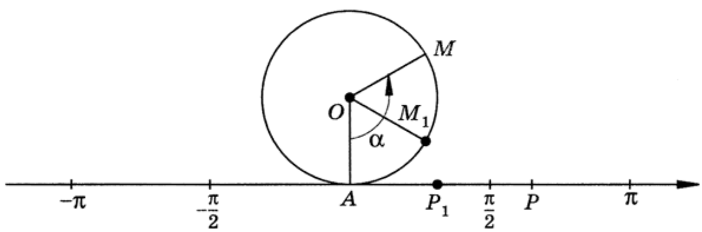


Рис. 79

ружности (вправо или влево) по числовой оси, начав качение от их совмещенных нулевых точек.

На рисунке 79 точки M_1 и P_1 соответствуют углу, равному 1 рад.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение единичной окружности. Как записывается уравнение единичной окружности?
2. Какие дуги в единичной окружности называются положительными (отрицательными)?
3. Как в общем виде обозначить множество положительных (отрицательных) дуг и углов?
4. Каким условиям должна удовлетворять единичная числовая окружность?
5. В чем заключается соответствие между точками числовой оси и точками числовой единичной окружности, имеющими общие нулевые точки?

§ 24. Тригонометрические функции числового аргумента

1. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Области их определения и значений. Каждому действительному числу соответствует единственная точка $M(\alpha)$ на числовой единичной окружности, и каждая точка $M(\alpha)$ этой окружности однозначно определена ее абсциссой и ординатой, т. е. абсцисса и ордината являются функциями числа α: $x = f(\alpha)$ и $y = \varphi(\alpha)$, причем абсцисса и ордината по абсолютной величине не превышают единицы ($|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$).

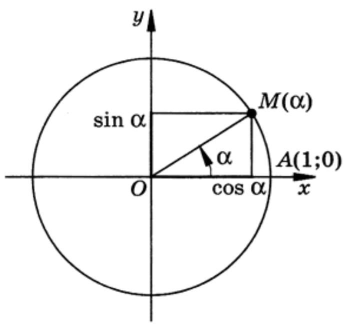


Рис. 80

Абсцисса x точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется косинусом числа α (рис. 80)*:

$$\cos\alpha = x. \qquad (3.16)$$

* Начала тригонометрии с использованием единичного круга были впервые изложены *Леонардом Эйлером* в 1747 г.

Ордината y точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности называется синусом числа α:

$$\sin \alpha = y. \tag{3.17}$$

Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ определены для любого действительного числа α, следовательно, область их определения: $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ ограничены, так как каждая из них может принимать любое числовое значение, не превосходящее по абсолютной величине единицы: $|\cos \alpha| \leqslant 1$ и $|\sin \alpha| \leqslant 1$, т. е. множеством значений функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ является промежуток $[-1; 1]$.

Отношение синуса числа α к его косинусу называется тангенсом числа α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{3.18}$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha$ есть отношение ординаты точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности к ее абсциссе.

Функция $\operatorname{tg} \alpha$ не определена для тех значений аргумента α, при которых $\cos \alpha = 0$ (абсцисса x равна нулю), т. е. тангенс не определен для значений аргумента $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, ... Множество значений аргумента α, для которых $\cos \alpha = 0$, выражается формулой $\alpha = \pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, область определения тангенса — все действительные числа, кроме чисел вида $\pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Область изменения функции $\operatorname{tg} \alpha$ — множество всех действительных чисел.

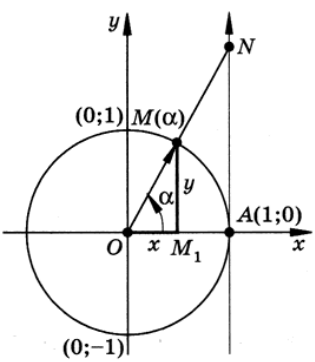


Рис. 81

В точке $A(1; 0)$ числовой единичной окружности (рис. 81) проведем касательную, выбрав на ней положительное направление, одинаковое с положительным направлением оси Oy. За начало отсчета на этой оси, которую назовем ***осью тангенсов***, примем точку $A(1; 0)$.

Пусть точка $M(\alpha)$ — любая точка числовой единичной окружности, кроме точек $(0; 1)$ и $(0; -1)$, т. е. точек, лежащих на оси Oy. Продолжив радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ до пересечения с осью тангенсов, получим на ней точку N (если бы точка $M(\alpha)$ лежала на оси ординат, это построение нельзя было бы выполнить). Точка N лежит на оси тангенсов выше точки A, если точка $M(\alpha)$ лежит в первой или третьей четвертях, и ниже A, если $M(\alpha)$ лежит во второй или четвертой четвертях.

Из подобия треугольников OMM_1 и ONA следует взаимная пропорциональность сторон:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{AN}{OA} = \frac{AN}{1} = AN.$$

Тангенс числа α равен ординате точки N (ординате точки пересечения продолженного радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью тангенсов). Таким образом, каждой точке $M(\alpha)$ числовой единичной окружности (за исключением точек $(0; 1)$ и $(0; -1)$) соответствует точка на оси тангенсов. Установленная зависимость наглядно показывает, как при изменении числа $M(\alpha)$ изменяется ордината точки N, т. е. изменяется величина тангенса.

Отношение косинуса числа α к его синусу называется котангенсом числа α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3.19)$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha$ есть отношение абсциссы точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности к ее ординате.

Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ не определена для тех значений аргумента, для которых $\sin\alpha = 0$ (ордината y равна нулю), т. е. котангенс не определен для значений аргумента $0, \pi, 2\pi, \ldots$. Множество значений аргумента α, для которых $\sin\alpha = 0$, выражается формулой $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, область определения котангенса — все действительные числа, кроме чисел вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Область изменения функции $\operatorname{ctg}\alpha$ — множество всех действительных чисел.

В точке $B(0; 1)$ числовой единичной окружности (рис. 82) проведем касательную, выбрав на ней положительное направление, одинаковое с положительным направлением оси Ox. За начало отсчета

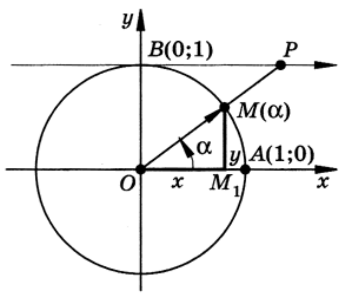


Рис. 82

на этой оси, которую назовем ***осью котангенсов***, примем точку B. Пусть точка $M(\alpha)$ — любая точка числовой единичной окружности, кроме точек (1; 0) и (−1; 0), т. е. точек, лежащих на оси Ox. Продолжив радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ до пересечения с осью котангенсов, получим на этой оси точку P (если точка $M(\alpha)$ лежит на оси абсцисс, это построение выполнить нельзя). Точка P лежит на оси котангенсов правее точки B, если точка $M(\alpha)$ лежит в первой или третьей четвертях, и левее B, если $M(\alpha)$ лежит во второй или четвертой четвертях.

Из подобия треугольников OMM_1 и OBP следует:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{BP}{OB} = \frac{BP}{1} = BP.$$

Следовательно, каждой точке $M(\alpha)$ числовой единичной окружности за исключением точек (1; 0) и (−1; 0) соответствует точка на оси котангенсов. Эта зависимость наглядно показывает изменение величины котангенса с изменением $M(\alpha)$.

Определим еще две тригонометрических функции, использующиеся значительно реже первых четырех.

Величина, обратная косинусу числа α, называется секансом числа α:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{3.20}$$

Функция $\sec\alpha$ не определена, как и $\operatorname{tg}\alpha$, для значений аргумента $\pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, область определения секанса — все действительные числа, кроме чисел вида $\pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Область изменения функции $\sec\alpha$ — множество всех действительных чисел.

Величина, обратная синусу числа α, называется косекансом числа α:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{3.21}$$

Функция $\operatorname{cosec}\alpha$ не определена, как и $\operatorname{ctg}\alpha$, для значений аргумента πk, $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, область определения косеканса — все действительные числа, кроме чисел вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Область изменения функции $\operatorname{cosec}\alpha$ — множество всех действительных чисел.

§ 25. Знаки, числовые значения и свойства четности и нечетности тригонометрических функций

1. Знаки тригонометрических функций. Из определений тригонометрических функций следует, что знаки косинуса и секанса совпадают со знаком абсциссы точки $M(\alpha)$ числовой единичной окружности (рис. 83, *а*), а знаки синуса и косеканса — со знаком ординаты точки $M(\alpha)$ (рис. 83, *б*). Знаки тангенса и котангенса находим по знакам синуса и косинуса одного и того же аргумента (рис. 83, *в*).

2. Вычисление числовых значений тригонометрических функций для значений аргументов: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Из определения тригонометрических функций следует:

1) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$,

$\operatorname{ctg} 0 = \dfrac{\cos 0}{\sin 0} = \dfrac{1}{0}$ не определен;

2) $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \dfrac{0}{1} = 0$,

$\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sin(\pi/2)}{\cos(\pi/2)} = \dfrac{1}{0}$ не определен;

3) $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\operatorname{tg} \pi = \dfrac{\sin \pi}{\cos \pi} = \dfrac{0}{-1} = 0$,

$\operatorname{ctg} \pi = \dfrac{\cos \pi}{\sin \pi} = \dfrac{-1}{0}$ не определен;

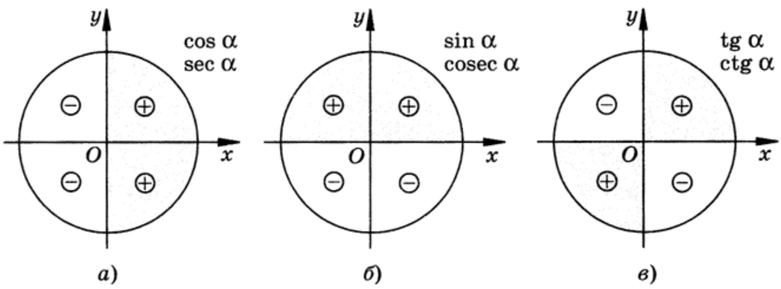


Рис. 83

4) $\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$, $\sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$, $\mathrm{ctg}\,(3\pi/2)=\dfrac{\cos(3\pi/2)}{\sin(3\pi/2)}=\dfrac{0}{-1}=0$,

$\mathrm{tg}\,(3\pi/2)=\dfrac{\sin(3\pi/2)}{\cos(3\pi/2)}=\dfrac{-1}{0}$ не определен;

5) $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$, $\mathrm{tg}\,2\pi=\dfrac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=\dfrac{0}{1}=0$,

$\mathrm{ctg}\,2\pi=\dfrac{\cos 2\pi}{\sin 2\pi}=\dfrac{1}{0}$ не определен.

3. Вычисление числовых значений тригонометрических функций для аргументов $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$. На числовой единичной окружности построим дугу $\cup AM=\pi/6$ (рис. 84, *а*). Проекцию точки M на ось Ox обозначим через M_1. В треугольнике M_1OM угол $\angle M_1OM=\pi/6$, гипотенуза $OM=1$, катет $M_1M=1/2$ (свойство катета, лежащего против угла, равного $\pi/6$).

По теореме Пифагора катет $OM_1=\sqrt{1-(1/2)^2}=\sqrt{3}/2$. Из определения тригонометрических функций получим

$$\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6)=1/2,$$

$$\mathrm{tg}\,(\pi/6)=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3,\ \mathrm{ctg}\,(\pi/6)=\sqrt{3}.$$

На числовой единичной окружности построим дугу $\cup AM=\pi/4$ (рис. 84, *б*). Проекцию точки M на ось Ox обозначим через M_1. В треугольнике M_1OM угол $\angle M_1OM=\pi/4$, гипотенуза $OM=1$, катет $OM_1=M_1M$.

По теореме Пифагора $2(OM_1)^2=1$, следовательно, $OM_1=MM_1=\sqrt{2}/2$. Из определения тригонометрических функций получим

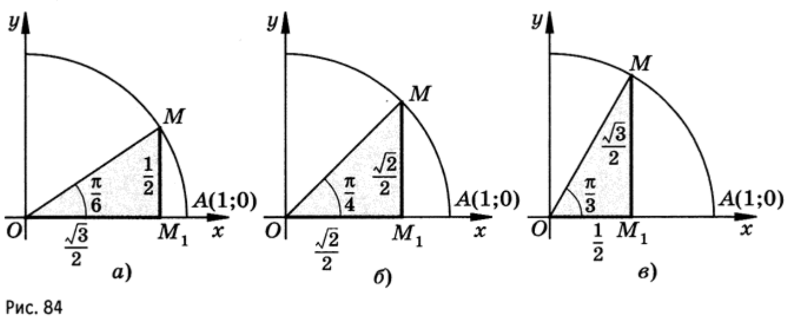


Рис. 84

$$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi/4) = 1,\ \operatorname{ctg}(\pi/4) = 1.$$

На числовой единичной окружности построим дугу $\cup AM = \pi/3$ (рис. 84, *в*). Проекцию точки M на ось Ox обозначим через M_1. В треугольнике M_1OM угол $\angle M_1OM = \pi/3$, гипотенуза $OM = 1$, катет $OM_1 = 1/2$ (свойство катета, лежащего против угла, равного $\pi/6$). По теореме Пифагора катет $M_1M = \sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. По определению тригонометрических функций получим

$$\cos(\pi/3) = 1/2,\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg}(\pi/3) = \sqrt{3}/3.$$

В таблице 2 приведены значения основных тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся значений аргумента.

Таблица 2

$\alpha°$	0°	30°		45°		60°		90°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	0,5236	$\frac{\pi}{4}$	0,7854	$\frac{\pi}{3}$	1,0472	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	0,5000	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\frac{1}{2}$	0,5000	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5773	1	1,0000	$\sqrt{3}$	1,7320	не существует	0	не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1,7320	1	1,0000	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5773	0	не существует	0	не существует

4. Свойства четности и нечетности тригонометрических функций. Свойства четности и нечетности функций были рассмотрены в § 14, п. 2. Исследуем на четность тригонометрические функции.

На числовой единичной окружности построим точки M_1 и M_2 (рис. 85), полученные поворотом точки $A(1;\,0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно. Эти точки симметричны относительно оси Ox. Точ-

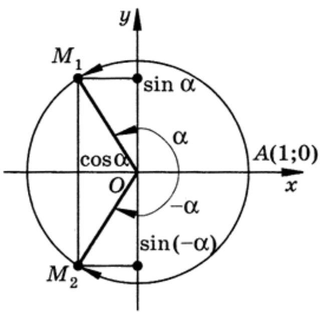


Рис. 85

ки M_1 и M_2 имеют одну и ту же абсциссу и равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку ординаты. По определению тригонометрических функций эта абсцисса является косинусом, а ординаты — синусами соответствующих углов.

Следовательно,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad (3.22)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad (3.23)$$

т. е. косинус является четной функцией, а синус — нечетной.

Легко показать, что тангенс и котангенс представляют собой нечетные функции:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

таким образом,

$$\mathbf{tg}\,(-\alpha) = -\mathbf{tg}\,\alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (3.24)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

и соответственно

$$\mathbf{ctg}\,(-\alpha) = -\mathbf{ctg}\,\alpha,\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (3.25)$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определения тригонометрических функций числового аргумента и укажите области их определения.
2. Какие тригонометрические функции являются ограниченными и какие — неограниченными?
3. Как определяются знаки тригонометрических функций по четвертям?
4. Как найти числовые значения тригонометрических функций для значений аргумента 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π?
5. Вычислите числовые значения тригонометрических функций для значений аргумента $\pi/6$, $\pi/4$ и $\pi/3$.
6. Какие тригонометрические функции являются четными и какие — нечетными? Почему?

§ 26. Изменение тригонометрических функций при возрастании аргумента от 0 до 2π

1. Изменение косинуса и синуса. Изменение функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ при возрастании аргумента α от 0 до 2π легко проследить по изменению абсциссы и ординаты движущейся точки $M(\alpha)$ по единичной числовой окружности в положительном направлении от точки $A(1; 0)$ (рис. 80).

2. Изменение тангенса. Для значений аргумента $\alpha < \pi/2$, близких к $\pi/2$, значения функции $\operatorname{tg}\alpha$ положительны и неограниченно возрастают.

Неограниченность возрастания $\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha \to \pi/2$ $(\alpha < \pi/2)$ можно проследить по изменению ординаты точки N (рис. 81). При $\alpha \to \pi/2$ ордината точки N может превзойти по величине любое сколь угодно большое наперед заданное положительное число, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha \to +\infty$ при $\alpha \to \pi/2$ $(\alpha < \pi/2)$.

Во второй четверти функция $\operatorname{tg}\alpha$ принимает отрицательные значения, и при возрастании аргумента α в промежутке $(\pi/2; \pi]$ ее значения возрастают от $-\infty$ до 0.

При изменении аргумента α в III и IV четвертях функция $\operatorname{tg}\alpha$ изменяется так же, как в I и II четвертях соответственно.

3. Изменение котангенса. Для значений аргумента $\alpha > 0$, близких к нулю, значения функции $\operatorname{ctg}\alpha$ неограниченно возрастают и положительны. Следовательно, в промежутке $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ функция $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от $+\infty$ до 0.

Убывание котангенса можно проследить по изменению абсциссы точки P (рис. 82) при $\alpha \to 0$ в промежутке $(0; \pi/2]$. Для значений α, близких к нулю, абсцисса точки P может превзойти по величине любое сколь угодно большое наперед заданное положительное число, следовательно, при $\alpha \to 0$ в промежутке $(0; \pi/2]$ значение $\operatorname{ctg}\alpha \to +\infty$.

Во II четверти функция $\operatorname{ctg}\alpha$ принимает отрицательные значения и при возрастании аргумента α в промежутке $[\pi/2; \pi)$ функция $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от 0 до $-\infty$.

При изменении аргумента α в III и IV четвертях функция $\operatorname{ctg}\alpha$ изменяется так же, как в I и II четвертях соответственно.

4. Изменение секанса и косеканса. Из определения функций $\sec\alpha$ (3.20) и $\operatorname{cosec}\alpha$ (3.21) следует, что знаки их совпадают со знаками функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ соответственно, а также, что одновременно с убыванием и возрастанием функций $\cos\alpha$ соответственно возрастает и убывает функция sec α, и одновременно с возрастанием и убыванием функции sin α соответственно убывает и возрастает функция cosec α.

Изменение тригонометрических функций по знаку и величине по четвертям тригонометрического круга представлено в таблице 3.

Таблица 3

Функция	0	I четверть	90°	II четверть	180°	III четверть	270°	IV четверть	360°
sin α	0	+ возрастает	+1	+ убывает	0	– убывает	–1	– возрастает	0
cos α	+1	+ убывает	0	– убывает	–1	– возрастает	0	+ возрастает	+1
tg α	0	+ возрастает	$\pm\infty$	– возрастает	0	+ возрастает	$\pm\infty$	– возрастает	0
ctg α	$\mp\infty$	+ убывает	0	– убывает	$\mp\infty$	+ убывает	0	– убывает	$\mp\infty$
sec α	+1	+ возрастает	$\pm\infty$	– возрастает	–1	– убывает	$\mp\infty$	+ убывает	+1
cosec α	$\mp\infty$	+ убывает	+1	+ возрастает	$\mp\infty$	– возрастает	–1	– убывает	$\mp\infty$

§ 27. Основные тригонометрические тождества

Если две тригонометрические функции от одних и тех же аргументов имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов, то они называются ***тождественно равными***. Равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов, называются ***тождеством***.

1. Основное тригонометрические тождество. Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же аргумента равна единице:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (3.22)$$

Пусть точка $M(x;\ y)$ единичной окружности (рис. 86) получена поворотом точки A на произвольный угол α. Тогда по определению функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ее (точки M) координаты: $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$. Поскольку точка M принадлежит единичной окружности, ее координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$, из чего и следует тождество (3.22).

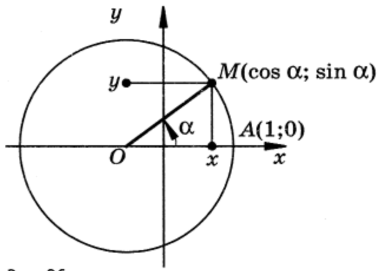


Рис. 86

2. Зависимость между тангенсом и котангенсом. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Перемножив эти выражения, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \pi k/2,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \pi k/2,\ k \in \mathbf{Z}, \tag{3.24}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \alpha \neq \pi k/2,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.25}$$

3. Зависимость между тангенсом и косинусом. Разделив обе части равенства (3.22) на $\cos^2\alpha$, получим

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.26}$$

4. Зависимость между котангенсом и синусом. Разделив обе части равенства (3.22) на $\sin^2\alpha$, получим

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.27}$$

5. Доказательство тригонометрических тождеств. При доказательстве тригонометрических тождеств возможно использование следующих приемов: преобразование обеих частей тождества к одному и тому же выражению, преобразование левой части к правой и правой к левой, доказательство того обстоятельства, что разность между правой и левой частями равна нулю.

Докажем тождество

$$\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.28}$$

Умножим числитель и знаменатель левой части тождества на $(1 + \cos\alpha)$:

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тождество доказано. При преобразованиях использовано основное тригонометрическое тождество (3.22).

Для доказательства тождества (3.28) можно также использовать свойство пропорции: $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha \Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\alpha$.

Тождество доказано.

§ 28. Выражение тригонометрических функций через другие тригонометрические функции

С использованием основных тригонометрических тождеств и следствий из них можно одну тригонометрическую функцию выразить через любую другую тригонометрическую функцию от того же аргумента.

1. Выражение тригонометрических функций через синус. Из тождества (3.22) имеем: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. В формулах, содержащих радикалы, знак «+» или «–» ставится в зависимости от того, какой четверти принадлежит аргумент α.

Подставив это выражение $\cos\alpha$ в выражения (3.18) и (3.19), определяющие функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -4/5$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

РЕШЕНИЕ. $\cos\alpha = -\sqrt{1-(-4/5)^2} = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}$.

2. Выражение тригонометрических функций через косинус. Из тождества (3.22) имеем $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Подставив это выражение для $\sin\alpha$ в (3.18) и (3.19), получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -4/5$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

РЕШЕНИЕ. $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$.

3. Выражение тригонометрических функций через тангенс. Из тождества (3.26) получим $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},\ \alpha \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По определению функции $\operatorname{tg}\alpha$ имеем $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$, $\alpha \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Подставив сюда найденное выражение для $\cos\alpha$, получим

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По формуле (3.25) имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2}$.

4. Выражение тригонометрических функций через котангенс. Из тождества (3.27) получим $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, поэтому

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По определению функции $\operatorname{ctg}\alpha$ имеем $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подставив сюда найденное выражение для $\sin\alpha$, получим

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

По формуле (3.24)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}/3$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

РЕШЕНИЕ. $\operatorname{tg}\alpha = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{-\sqrt{1+1/3}} = -\sqrt{3}/2$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{1}{-\sqrt{1+1/3}} = -\dfrac{1}{2}$.

В таблице 4 приведены выражения основных тригонометрических функций через другие тригонометрические функции.

Таблица 4

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как изменяются основные тригонометрические функции с возрастанием аргумента от 0 до 2π (по четвертям)?
2. Какие тригонометрические выражения называются тождественно равными?
3. Докажите основные тригонометрические тождества. При каких допустимых значениях аргумента тождества справедливы?
4. Выразите тригонометрические функции через синус, косинус, тангенс и котангенс соответственно.

§ 29. Периодичность тригонометрических функций

Функция $f(\alpha)$ называется ***периодической***, если существует положительное число $\lambda \neq 0$, называемое ***периодом***, такое, что равенство $f(\alpha \pm \lambda) = f(\alpha)$ удовлетворяется при любом допустимом значении аргумента α.

Периодами являются также числа вида $n\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$. Наименьший положительный период для функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ равен 2π, а для функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ равен π.

Свойство периодичности тригонометрических функций при $k \in \boldsymbol{Z}$ выражается тождествами:

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi k); \tag{3.29}$$

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + 2\pi k); \tag{3.30}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi k); \tag{3.31}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi k). \tag{3.32}$$

Докажем справедливость формулы (3.29) методом от противного. Для этого докажем, что 2π — основной (наименьший положительный) период для функции $\cos \alpha$. Покажем, что не существует такого положительного числа λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, для которого равенство (3.29) было бы верным для всех допустимых значений α.

Допустим, что периодом функции $\cos \alpha$ является число λ $(0 < \lambda < 2\pi)$, т. е. $\cos (\alpha + \lambda) = \cos \alpha$. Положим $\alpha = 0$, тогда $\cos (0 + \lambda) = \cos 0 = 1$, но $\cos \lambda = 1$ только в точке $A(1; 0)$ числовой единичной окружности (рис. 85), для которой $\lambda = 2\pi k$. Но дуга, измеряющаяся числом $0 < \lambda < 2\pi$, не оканчивается в точке $A(1; 0)$, а потому косинус соответствующего угла не равен 1. Полученное противоречие показывает, что не существует положительного числа $0 < \lambda < 2\pi$, для которого было бы справедливо равенство $\cos (\alpha + \lambda) = \cos \alpha$.

Наименьшим положительным значением λ является число 2π, так как $\lambda = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ для $\cos \lambda = 1$, из чего следует, что $\cos \alpha$ — периодическая функция с периодом, равным 2π.

Таким же образом доказывается справедливость равенств (3.30—3.32).

♦ ПРИМЕР 1

Вычислить: 1) $2 \cos (4{,}5\pi) + \sin (19\pi/3)$; 2) $\sin (-300°) - \operatorname{tg} (-150°)$.

РЕШЕНИЕ. 1) На основании свойств периодичности тригонометрических функций:

$$2 \cos (2\pi \cdot 2 + 0{,}5\pi) + \sin (2\pi \cdot 3 + \pi/3) = 2 \cos 0{,}5\pi + \sin (\pi/3) = \\ = 0 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2.$$

2) Прибавив по одному периоду к каждому из аргументов, получим:

$$\sin (-300° + 360°) - \operatorname{tg} (-150° + 180°) = \sin 60° - \operatorname{tg} 30° = \\ = \sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/3 = \sqrt{3}/6.$$

♦ ПРИМЕР 2

Найти период функции: 1) $y_1 = \cos x/2$; 2) $y_2 = \sin 2x + \cos 3x$; 3) $y_3 = \sin (3x/2) + \sin (2x/3)$.

РЕШЕНИЕ. 1) Обозначим искомый период через λ, тогда получим: $\cos (x + + \lambda)/2 = \cos x/2$, или $\cos (x/2 + \lambda/2) = \cos (x/2)$, следовательно, $\lambda/2 = 2\pi$, т. е. $\lambda = 4\pi$.

2) Найдем период каждого из слагаемых:

$$\sin 2(x + \lambda_1) = \sin 2x,\ 2\lambda_1 = 2\pi,\ \lambda_1 = \pi;$$
$$\cos 3(x + \lambda_2) = \cos 3x,\ 3\lambda_2 = 2\pi,\ \lambda_2 = 2\pi/3.$$

Каждое число, кратное периоду, само является периодом, поэтому общее кратное чисел λ_1 и λ_2 является периодом функции y_2. Наименьшее общее кратное чисел π и $2\pi/3$, равное наименьшему общему кратному числителей периодов λ_1 и λ_2, составляет 2π.

3) Имеем $\sin \left(\frac{3x}{2} + \frac{3\lambda_1}{2}\right) = \sin \frac{2x}{3}$, $\frac{3\lambda_1}{2} = 2\pi$, $\lambda_1 = \frac{4\pi}{3}$;

$$\sin \frac{2(x + \lambda_2)}{3} = \sin \frac{2x}{3};\ \sin \left(\frac{2x}{3} + \frac{2\lambda_2}{3}\right) = \sin \frac{2x}{3},\ \frac{2\lambda_2}{3} = 2\pi,\ \lambda_2 = 3\pi.$$

Наименьшее общее кратное числителей периодов λ_1 и λ_2 равно 12π, следовательно, период функции y_3 равен 12π.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение периодической функции.
2. Являются ли числа, кратные наименьшему периоду, периодами функции?
3. Какие числа являются периодами функций синуса и косинуса?
4. Какие числа являются периодами функций тангенса и котангенса?
5. Приведите примеры вычисления периодов тригонометрических функций.

§ 30. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют привести тригонометрические функции углов $(\pi/2)k \pm \alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$ к тригонометрическим функциям угла α.

1. Свойство полупериода косинуса и синуса. На числовой единичной окружности отметим произвольную точку M и точку N такую, что $\smile MN = \pi$ (рис. 87). Точки M и N симметричны относительно начала координат. Поэтому соответствующие координаты этих точек равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Точке M соответствуют координаты $(-x;\, y)$, точке N — координаты $(x;\, -y)$. Следовательно,

$$\cos\alpha = -\cos(\alpha \pm \pi); \qquad (3.33)$$

$$\sin\alpha = -\sin(\alpha \pm \pi). \qquad (3.34)$$

Функции косинуса и синуса при увеличении или уменьшении аргумента на π изменяются только по знаку.

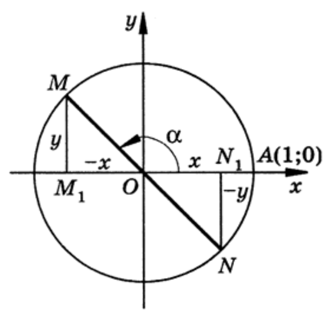


Рис. 87

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $f_1 = \sin(5\pi/6)$; 2) $f_2 = \cos(5\pi/4)$; 3) $f_3 = \cos(-210°)$.

РЕШЕНИЕ. Используя формулы (3.33—3.34), получим:

1) $f_1 = -\sin(5\pi/6 - \pi) = -\sin(-\pi/6) =$
$= \sin(1/2) = 1/2$;

2) $f_2 = -\cos(5\pi/4 - \pi) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{3}/2$;

3) $f_3 = -\cos(-210° + 180°) = -\cos(-30°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$.

2. Тригонометрические функции взаимно дополнительных аргументов. Два аргумента, в сумме составляющие $\pi/2$, называются ***взаимно дополнительными***. Такими являются, например, $\pi/6$ и $\pi/3$ или $2\pi/3$ и $-\pi/6$.

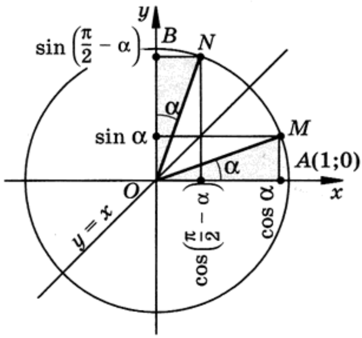


Рис. 88

Числовая единичная окружность симметрична относительно прямой $y = x$ (биссектрисы I и III координатных углов). Пусть дуги $\cup AM = \alpha$ и $\cup BN = -\alpha$ (рис. 88), тогда точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$. При отражении в прямой $y = x$ оси меняются местами: ось абсцисс переходит в ось ординат и наоборот.

Сравнивая координаты точек $M(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $N(\cos(\pi/2 - \alpha); \sin(\pi/2 - \alpha))$, замечаем, что абсцисса точки N равна ординате точки M и, наоборот, ордината точки N равна абсциссе точки M, из чего следует:

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha; \qquad (3.35)$$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (3.36)$$

Таким образом, выявлена зависимость между синусом и косинусом взаимно дополнительных аргументов. Применив формулы (3.35—3.36), установим зависимости между тангенсом и котангенсом взаимно дополнительных аргументов:

$$\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\cos(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z.} \qquad (3.37)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha) = \frac{\cos(\pi/2 - \alpha)}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha \neq \pi/2 + \pi k,\ k \in Z.} \qquad (3.38)$$

Формулы тригонометрических функций взаимно дополнительных аргументов обычно применяются для приведения тригонометрических функций к положительному аргументу, меньшему $\pi/4$ (45°).

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $f_1 = \sin(2\pi/3)$; 2) $f_2 = \cos(5\pi/6)$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin(\pi/2 - (-\pi/6)) = \cos(-\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$;

2) $f_2 = \cos(\pi/2 - (-\pi/3)) = \sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

3. Тригонометрические функции аргумента ($\pi/2 + \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha; \tag{3.39}$$

$$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha; \tag{3.40}$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{3.41}$$

$$\operatorname{ctg}(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.42}$$

Для доказательства тождеств (3.39—3.42) в тождествах (3.35—3.38) заменим аргумент (α) на аргумент ($-\alpha$) и, применяя свойства четности и нечетности, получим, например,

$$\sin(\pi/2 - (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

т. е. (3.39). Так же доказываются тождества (3.40—3.42).

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $f_1 = \sin 150°$; 2) $f_2 = \operatorname{ctg}(2\pi/3)$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = 1/2$;

2) $f_2 = \operatorname{ctg}(\pi/2 + \pi/6) = -\operatorname{tg}(\pi/6) = -\sqrt{3}/3$.

4. Тригонометрические функции аргумента ($\pi - \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \tag{3.43}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha; \tag{3.44}$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{3.45}$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{3.46}$$

Для доказательства тождеств (3.43—3.44) в тождествах (3.33—3.34) заменим аргумент (α) на аргумент ($-\alpha$) и, применив свойства четности и нечетности, получим, в частности,

$$\sin(\pi + (-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha,$$

т. е. тождество (3.43).

Аналогично доказывается тождество (3.44).

Свойства (3.45—3.46) можно доказать, применив свойство периодичности тангенса и котангенса и свойства их нечетности.

♦ ПРИМЕР
Вычислить: 1) $f_1 = \cos 150°$; 2) $f_2 = \text{tg}\, 120°$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$;

2) $f_2 = \text{tg}\,(180° - 60°) = -\text{tg}\, 60° = -\sqrt{3}$.

5. Тригонометрические функции аргумента ($\pi + \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \tag{3.47}$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \tag{3.48}$$
$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\, \alpha; \tag{3.49}$$
$$\text{ctg}\,(\pi + \alpha) = \text{ctg}\, \alpha. \tag{3.50}$$

Тождества (3.47—3.48) являются видоизмененными тождествами (3.33—3.34), а тождества (3.49—3.50) являются формулами периодичности тангенса и котангенса.

♦ ПРИМЕРЫ
Вычислить: 1) $f_1 = \sin 225°$; 2) $f_2 = \text{ctg}\, 240°$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\sqrt{2}/2$;

2) $f_2 = \text{ctg}\, 60° = \sqrt{3}/3$.

6. Тригонометрические функции аргумента ($3\pi/2 - \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(3\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha; \tag{3.51}$$
$$\cos(3\pi/2 - \alpha) = -\sin \alpha; \tag{3.52}$$
$$\text{tg}\,(3\pi/2 - \alpha) = \text{ctg}\, \alpha; \tag{3.53}$$
$$\text{ctg}\,(3\pi/2 - \alpha) = \text{tg}\, \alpha. \tag{3.54}$$

Тождества (3.51) и (3.53) можно доказать следующим образом:

$$\sin(3\pi/2 - \alpha) = \sin(\pi + (\pi/2 - \alpha)) = -\sin(\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha,$$
$$\text{tg}\,(3\pi/2 - \alpha) = \text{tg}\,(\pi/2 - \alpha) = \text{ctg}\, \alpha.$$

Тождества (3.52) и (3.54) доказываются аналогично.

♦ ПРИМЕР
Вычислить: 1) $f_1 = \sin 600°$; 2) $f_2 = \cos 225°$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin 240° = \sin(270° - 30°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$;

2) $f_2 = \cos(270° - 45°) = -\sin 45° = -\sqrt{2}/2$.

7. Тригонометрические функции аргумента ($3\pi/2 + \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(3\pi/2 + \alpha) = -\cos\alpha; \tag{3.55}$$
$$\cos(3\pi/2 + \alpha) = \sin\alpha; \tag{3.56}$$
$$\operatorname{tg}(3\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{3.57}$$
$$\operatorname{ctg}(3\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{3.58}$$

Заменив в тождествах (3.51—3.54) аргумент (α) на аргумент ($-\alpha$) и применив свойства четности и нечетности, получим тождества (3.55—3.58).

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $f_1 = \sin 330°$; 2) $f_2 = \cos 315°$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin(270° + 60°) = -\cos 60° = -1/2$;

2) $f_2 = \cos(270° + 45°) = \sin 45° = \sqrt{2}/2$.

8. Тригонометрические функции аргумента ($2\pi - \alpha$). Докажем тождества:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \tag{3.59}$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha; \tag{3.60}$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{3.61}$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \tag{3.62}$$

Согласно свойству периодичности и нечетности, имеем

$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Тождества (3.60—3.62) доказываются аналогично.

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $f_1 = \sin 300°$; 2) $f_2 = \cos 330°$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2$;

2) $f_2 = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$.

Рассмотренные формулы приведения представлены в таблице 5.

Применяя формулы приведения, рекомендуется пользоваться следующими правилами:

I. Если угол α откладывается от оси Ox, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента ($-\alpha$), ($\pi \pm \alpha$), ($2\pi - \alpha$), не изменяется. Если угол α откладывается от оси Oy, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента ($\pi/2 \pm \alpha$), ($3\pi/2 \pm \alpha$), заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот).

II. Знак, с которым нужно брать тригонометрическую функцию в правой части, находится по знаку левой части в предположении, что $0 < \alpha < \pi/2$.

Таблица 5

Функция / аргумент	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$
$\varphi = -\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\varphi = \pi/2 - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\varphi = \pi/2 + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\varphi = \pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\varphi = \pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\varphi = 3\pi/2 - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\varphi = 3\pi/2 + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\varphi = 2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

♦ ПРИМЕР

Составить формулу приведения для $\mathrm{tg}\,(3\pi/2 + \alpha)$.

РЕШЕНИЕ. Так как угол α откладывается от оси Oy, то в правой части формулы оказывается функция «котангенс». Формула верна при всех допустимых значениях аргумента α, следовательно, она верна и для $0 < \alpha < \pi/2$, но в этом случае дуга $(3\pi/2 + \alpha)$ оканчивается в четвертой четверти, в которой функция тангенса является отрицательной. Тогда $\mathrm{tg}\,(3\pi/2 + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие формулы называются формулами приведения?
2. При каких вычислениях необходимо знание формул приведения?
3. В чем заключается свойство полупериода синуса и косинуса?
4. Сформулируйте правила названий тригонометрических функций при составлении формул приведения.
5. Сформулируйте правила знаков при составлении формул приведения.

§ 31. Тригонометрические функции алгебраической суммы двух аргументов (формулы сложения)

Формулами сложения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $(\alpha \pm \beta)$ через одноименные функции углов α и β. Приведем эти формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \quad (3.63)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \quad (3.64)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad (3.65)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \quad (3.66)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\alpha \neq \left(\frac{\pi}{2}\right)(2k + 1),\ \beta \neq \left(\frac{\pi}{2}\right)(2k + 1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 1; \quad (3.67)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\alpha \neq \left(\frac{\pi}{2}\right)(2k + 1),\ \beta \neq \left(\frac{\pi}{2}\right)(2k + 1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 1; \quad (3.68)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta},$$

$$\alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \neq -\beta + \pi k; \quad (3.69)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \neq \beta + \pi k. \quad (3.70)$$

В выражениях (3.67—3.70) $k \in \mathbf{Z}$.

1. Косинус разности двух аргументов. Косинус разности двух аргументов равен сумме произведения косинусов и произведения синусов этих аргументов (3.66).

Отложим на единичной окружности (рис. 89) ду́ги, соответствующие углам α и β; пусть M и N — точки, в которых оканчиваются эти дуги: $\angle AOM = \alpha$, $\angle AON = \beta$.

Координаты точек M и N в системе координат xOy:

$$x_1 = \cos\alpha,\ y_1 = \sin\alpha;\ x_2 = \cos\beta,\ y_2 = \sin\beta;$$

тогда квадрат расстояния между точками M и N выражается соотношением:

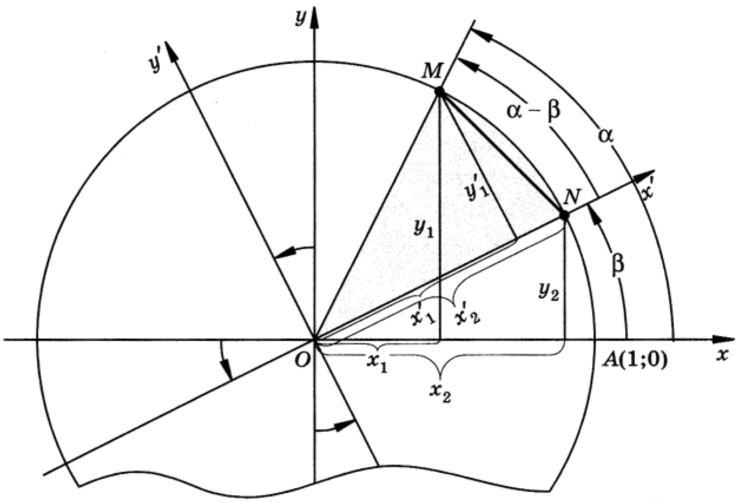


Рис. 89

$$(MN)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 =$$
$$= (\cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos\alpha) + (\sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha) =$$
$$= (\cos^2\beta + \sin^2\beta) + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \qquad (*)$$

Повернем оси координат на угол β. Тогда направление оси абсцисс Ox' совпадет с направлением луча ON. Радиус OM составит с осью Ox' угол, равный $(\alpha - \beta)$.

Координаты точек M и N в системе координат $x'Oy'$:

$$x'_1 = \cos(\alpha - \beta),\ \ y'_1 = \sin(\alpha - \beta);\ \ x'_2 = 1,\ \ y'_2 = 0;$$

тогда квадрат расстояния между точками M и N выражается соотношением*:

$$(MN)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) =$$
$$= [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) =$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta). \qquad (**)$$

Приравняем выражения (*) и (**):

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

отсюда получаем выражение (3.66).

---

* Это соотношение основано на формуле (10.18) гл. 10, § 70, п. 1.

2. Косинус суммы двух аргументов. Заменив в формуле (3.66) аргумент β на аргумент $(-\beta)$, получим: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$. Воспользовавшись свойствами четности косинуса и нечетности синуса, получим (3.65).

3. Синус суммы двух аргументов. По формуле приведения (3.36) имеем $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\pi/2 - (\alpha + \beta)) = \cos((\pi/2 - \alpha) - \beta)$. Далее по (3.66) получим формулу (3.63).

4. Синус разности двух аргументов. Заменив в формуле (3.63) аргумент β на аргумент $(-\beta)$, получим $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$. Используя свойства четности косинуса и нечетности синуса, приходим к (3.64).

5. Тангенс суммы двух аргументов. Имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}},$$

т. е. формулу (3.67). Формула (3.67) имеет место при всех допустимых значениях аргумента, т. е. таких, при которых тангенсы углов α, β и $(\alpha + \beta)$ имеют смысл. Следовательно, для каждого из рассматриваемых углов значение косинуса не должно быть равным нулю.

6. Тангенс разности двух аргументов. Заменив в (3.67) β на $(-\beta)$ и воспользовавшись свойством нечетности тангенса, получим выражение (3.68):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

7. Котангенсы суммы и разности двух аргументов. Формулы (3.69) и (3.70) выводятся аналогично тому, как это было сделано для формул сложения и разности тангенсов.

♦ ПРИМЕР 1

Вычислить: 1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $f_1 = \sin 70° \cos 40° - \cos 70° \sin 40°$; 4) $f_2 = \cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$, $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, $\beta \in (\pi; 3\pi/2)$.

РЕШЕНИЕ. 1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1);$

2) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1);$

3) $f_1 = \sin(70° - 40°) = \sin 30° = 1/2;$

4) вычислим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - (3/5)^2} = 4/5, \ \sin\beta = -\sqrt{1 - (4/5)^2} = -3/5.$$

Подставив исходные данные и найденные значения в формулу (3.65), получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}.$$

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение: $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$.

РЕШЕНИЕ. $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 0$, т. е. $\sin(2x - x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x = 0, \ x = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы сложения для основных тригонометрических функций.
2. При каких значениях аргумента формулы $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)$ и $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta)$ не имеют смысла?
3. Выведите формулу сложения для косинуса разности двух углов. Как из нее получить остальные формулы сложения?
4. Приведите простейшие примеры применения формул сложения.

§ 32. Тригонометрические функции удвоенного аргумента

Рассмотрим формулы сложения для такого частного случая, когда слагаемые аргумента равны. При этом получим формулы, выражающие тригонометрические функции двойного угла 2α через тригонометрические функции одинарного угла α:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Таким образом, формулы для тригонометрических функций удвоенного аргумента при $\alpha \neq \pi/2 + \pi k$, $\alpha \neq \pi/4 + \pi/2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ имеют следующий вид:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \tag{3.71}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \tag{3.72}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3.73}$$

Формула для косинуса удвоенного аргумента может выглядеть иначе:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Итак, получены формулы, позволяющие косинус удвоенного аргумента выражать только через косинус или только через синус этого аргумента:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \tag{3.74}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \tag{3.75}$$

♦ ПРИМЕР 1

Выразить: 1) $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$; 2) $\sin 3\alpha$ через $\sin \alpha$.

РЕШЕНИЕ. 1) $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha} =$

$= \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

2) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$.

♦ ПРИМЕР 2

Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0{,}3$.

РЕШЕНИЕ. Применив формулу (3.72), получим: $\cos 2\alpha = 1 - 2(-0{,}3)^2 = 0{,}82$.

♦ ПРИМЕР 3

Решить уравнение: $\sin x \cdot \cos x = 1/2$.

РЕШЕНИЕ. **Умножив левую и правую части на 2, получим**

$$2 \sin x \cos x = 1,\ \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pi/2 + 2\pi k,$$
$$x = \pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы тригонометрических функций удвоенного аргумента.
2. При каких значениях аргумента функция tg 2α не имеет смысла?
3. Приведите примеры вычислений с использованием формул удвоения.

§ 33. Тригонометрические функции половинного аргумента

Выразим тригонометрические функции аргумента α через тригонометрические функции аргумента $\alpha/2$.

Заменив в формулах (3.74—3.75) аргумент α на аргумент $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2},$$
$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{3.76}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{3.77}$$

причем знак перед корнем определяется по четверти, которой принадлежит аргумент α.

Разделив почленно равенство (3.77) на равенство (3.76), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.78}$$

Знак перед радикалом надо выбирать так, чтобы он совпадал со знаком tg ($\alpha/2$), иначе говоря, знак (+), если $\alpha/2$ принадлежит I или III четвертям, и знак (−), если $\alpha/2$ принадлежит II и IV четвертям.

Соответственно

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \alpha \neq 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (3.79)$$

Вместо формул (3.78—3.79) можно получить формулы, дающие рациональное выражение $\alpha/2$ через тригонометрические функции аргумента α. Имеем равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)},\ \cos(\alpha/2) \neq 0.$$

Умножив числитель и знаменатель правой части на $2\cos(\alpha/2)$, получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)},$$

при этом числитель $2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \sin\alpha$, а знаменатель $2\cos^2(\alpha/2) = 1 + \cos\alpha$, поэтому

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (3.80)$$

Аналогично можно доказать следующие равенства:

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad (3.81)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha/2) = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad (3.82)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \qquad (3.83)$$

В равенствах (3.81), (3.82) левая и правая части имеют различные области определения. В равенстве (3.81) левая часть имеет областью определения $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, а правая часть имеет областью определения $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. В равенстве (3.82) области определения левой и правой частей: $\alpha \neq 2\pi k$ и $\alpha \neq \pi k$ соответственно, $k \in \boldsymbol{Z}$. В равенстве (3.83) области определения совпадают: $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Используя соотношения (3.81, 3.82) при решении тригонометрических уравнений, необходимо учитывать несовпадение их областей определения.

♦ ПРИМЕР

Найти $\sin(\alpha/2)$, $\cos(\alpha/2)$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $\alpha \in (0; \pi/2)$.

РЕШЕНИЕ. По основному тригонометрическому тождеству $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$. По формулам (3.76), (3.77) находим:

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - 0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}1} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + 0{,}8}{2}} = \sqrt{0{,}9} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{1}{3}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы тригонометрических функций половинного аргумента.
2. При каких значениях аргумента формулы $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$ не имеют смысла?
3. Покажите, что в формулах (3.81) и (3.82) имеет место несовпадение областей определения левой и правой частей формул.
4. Приведите простейшие примеры применения формул для тригонометрических функций половинного угла.

§ 34. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Все тригонометрические функции любого аргумента выражаются рационально через тангенс половины этого аргумента. Выразим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha/2$. По формулам (3.71), (3.72) имеем

$$\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2),$$
$$\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2).$$

Разделив правые части этих равенств на $1 = \sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)$, получим

$$\sin\alpha = \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)}, \quad \cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)}.$$

Разделим правые части этих двух равенств на $\cos^2(\alpha/2)$:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}; \tag{3.84}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \tag{3.85}$$

Из формул (3.84), (3.85) следует:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}; \tag{3.86}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}. \tag{3.87}$$

Полученные формулы теряют смысл при всех $\alpha = \pi(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

♦ ПРИМЕР

Вычислить выражение $\dfrac{5\cos\alpha - 3}{10\sin\alpha + 1}$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 3$.

РЕШЕНИЕ. По формулам (3.84), (3.85) получаем: $\sin\alpha = \dfrac{6}{1+9} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-9}{1+9} = -\dfrac{4}{5}$, следовательно,

$$\frac{5\cos\alpha - 3}{10\sin\alpha + 1} = \frac{-4-3}{6+1} = -1.$$

§ 35. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

В вычислениях, относящихся к тригонометрическим функциям, часто встречаются случаи, когда необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций ($\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$) в алгебраическую сумму.

Сложив почленно равенства (3.63), (3.64), получим:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \tag{3.88}$$

Складывая почленно равенства (3.65), (3.66), получим

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

откуда

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3.89)$$

Вычитая из равенства (3.89) равенство (3.88), получим

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]. \qquad (3.90)$$

♦ ПРИМЕР

Представить в виде суммы произведение: 1) $f_1 = \sin 25° \sin 5°$; 2) $f_2 = \cos(x/2)\cos(x/3)\cos(x/4)$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (3.90) $f_1 = (\cos 20° - \cos 30°)/2 = \left(\cos 20° - \sqrt{3}/4\right)/2$;

2) $f_2 = \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{13x}{12} + \cos\frac{5x}{12} + \cos\frac{7x}{12} + \cos\frac{x}{12}\right).$

Формулы (3.88), (3.90) можно использовать для понижения степени функций вида $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$. В частности,

$$\sin^2 x = \sin x \sin x = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \cos x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 0 + \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);$$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x = \frac{1}{2}(\sin x - \sin x\cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x =$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).$$

Таким образом, получена формула для синуса утроенного аргумента:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \qquad (3.91)$$

Аналогично

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x =$$

$$= \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x).$$

Получена также формула для косинуса утроенного аргумента:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \qquad (3.92)$$

Таким же образом можно привести к алгебраической сумме:

$$\cos^5 x = \cos^3 x \cos^2 x = \left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x \cos 2x + \frac{1}{8}\cos 3x \cos 2x =$$

$$= \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) =$$

$$= \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.
2. Как выполняется понижение степени тригонометрических функций?

§ 36. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

Представим суммы и разности тригонометрических функций в виде произведения тригонометрических функций от других аргументов.

1. Сумма синусов. По формуле (3.88) имеем

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A \cos B.$$

Пусть $A + B = \alpha$, $A - B = \beta$. Решив систему

$$\begin{cases} A + B = \alpha, \\ A - B = \beta \end{cases}$$

относительно аргументов A и B, получим

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad B = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Тогда

$$\mathbf{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.} \tag{3.93}$$

2. Разность синусов. Заменим в (3.93) аргумент β на аргумент $(-\beta)$:

$$\sin \alpha + \sin(-\beta) = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

или

$$\mathbf{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.} \tag{3.94}$$

3. Сумма косинусов. Заменим в выражении $\cos \alpha + \cos \beta$ косинус каждого аргумента синусом дополнительного аргумента и воспользуемся соотношением (3.93). Тогда

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{(\pi/2 - \alpha) + (\pi/2 - \beta)}{2} \cos \frac{(\pi/2 - \alpha) - (\pi/2 - \beta)}{2} =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.} \tag{3.95}$$

4. Разность косинусов. Аналогично с помощью формулы (3.94) выводится выражение для разности косинусов:

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{(\pi/2 - \alpha) - (\pi/2 - \beta)}{2} \cos \frac{(\pi/2 - \alpha) + (\pi/2 - \beta)}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

т. е.

$$\mathbf{\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.} \tag{3.96}$$

5. Сумма тангенсов. По определению функции тангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

или

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \quad (3.97)$$

6. Разность тангенсов. Заменив в (3.97) аргумент β на аргумент $(-\beta)$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos(-\beta)},$$

т. е.

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \quad (3.98)$$

7. Преобразование выражений $(1 + \cos\alpha)$, $(1 - \cos\alpha)$, $(1 + \sin\alpha)$ и $(1 - \sin\alpha)$ в произведение. Заменив в формулах для косинуса удвоенного аргумента (3.74—3.75) аргумент α на аргумент $\alpha/2$, получим

$$\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1,\ \cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2),$$

тогда

$$\mathbf{1 + \cos\boldsymbol{\alpha} = 2\cos^2(\boldsymbol{\alpha}/2),} \quad (3.99)$$

$$\mathbf{1 - \cos\boldsymbol{\alpha} = 2\sin^2(\boldsymbol{\alpha}/2).} \quad (3.100)$$

Заменив синус аргумента α на косинус дополнительного аргумента и воспользовавшись (3.99), получим:

$$1 + \sin\alpha = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\cos^2\frac{\pi/2 - \alpha}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

т. е.

$$\mathbf{1 + \sin\boldsymbol{\alpha} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).} \quad (3.101)$$

Аналогично

$$1 - \sin\alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin^2\frac{\pi/2 - \alpha}{2} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

или

$$\mathbf{1 - \sin\boldsymbol{\alpha} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).} \quad (3.102)$$

8. Условия равенства одночленных тригонометрических функций. Если синусы двух аргументов равны ($\sin x = \sin y$), то $\sin x - \sin y = 0$. Тогда по (3.94)

$$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x-y}{2} = 0, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{2} = \pi k, \\ \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Следовательно, условием равенства $\sin x = \sin y$ является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x - y = 2\pi k, \\ x + y = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right. \quad (3.103)$$

Аналогично с использованием (3.96) можно показать, что для равенства $\cos x = \cos y$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} x + y = 2\pi k, \\ x - y = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right. \quad (3.104)$$

Для того чтобы тангенсы двух аргументов были равны ($\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$), необходимо, чтобы тангенс каждого из двух аргументов существовал и чтобы $\sin(x - y) = 0$ (из (3.98)); следовательно,

$$x - y = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (3.105)$$

♦ ПРИМЕР 1

Преобразовать в произведение:

1) $f_1 = \cos(\pi/5) - \cos(7\pi/10)$; 2) $f_2 = \operatorname{ctg}(2\pi/7) - \operatorname{ctg}(\pi/7)$;

3) $f_3 = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (3.96) $f_1 = 2\sin(9\pi/20)\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\sin(9\pi/20)$;

2) выразив котангенсы через тангенсы, используем формулу (3.98): $f_2 = \operatorname{tg}(\pi/2 - 2\pi/7) - \operatorname{tg}(\pi/2 - \pi/7) = \operatorname{tg}(3\pi/14) - \operatorname{tg}(5\pi/14) = -\dfrac{\sin(\pi/7)}{\cos(3\pi/14)\cdot\cos(5\pi/14)}$;

3) используя формулы (3.99—3.100) и (3.95), получаем:

$$f_3 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{2(\alpha-\beta)}{2}\right] = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

♦ ПРИМЕР 2

Преобразовать в произведение выражение: 1) $f_1 = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; 2) $f_2 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

РЕШЕНИЕ. 1) Преобразуя выражение $(1 + \cos\alpha)$ по формуле (3.99) и используя формулу удвоенного аргумента (3.71), получаем:

$$f_1 = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

2) преобразуем в произведение сумму двух первых слагаемых по (3.93), а третье слагаемое преобразуем по формуле удвоенного аргумента (3.71):

$$f_2 = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{3x}{2}\,2\cos x\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы для преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение.
2. При каких значениях аргумента формулы для суммы $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$ не имеют смысла?
3. Выведите формулы для преобразования выражений $(1 \pm \cos\alpha)$ и $(1 \pm \sin\alpha)$ в произведение.
4. Запишите условия равенства одноименных тригонометрических функций.

§ 37. Свойства тригонометрических функций и их графики

1. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график. Используя рассмотренные свойства тригонометрических функций и формулы приведения, построим график функции $y = \sin x$. В силу периодичности функции синуса достаточно построить график в промежутке $[-\pi; \pi]$, так как в промежутках таких, как $[-3\pi; -\pi]$, $[\pi; 3\pi]$, $[3\pi; 5\pi]$, график синуса будет иметь тот же вид, что и в промежутке $[-\pi; \pi]$. В указанных промежутках график получается путем сдвига гра-

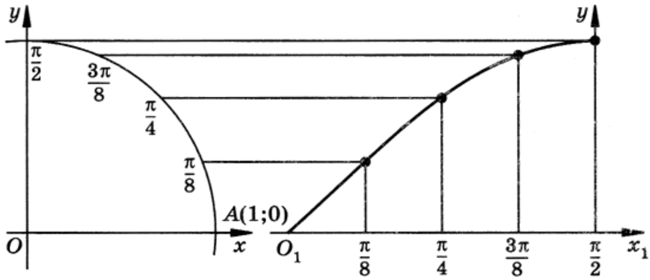


Рис. 90

фика синуса в промежутке $[-\pi; \pi]$ влево или вправо. Учитывая свойство нечетности синуса, достаточно построить график в промежутке $[0; \pi]$, так как в промежутке $[-\pi; 0]$ график будет симметричен графику на отрезке $[0; \pi]$ относительно начала координат. По свойству дополнительного аргумента (3.43) заключаем, что точки x и $(\pi - x)$ симметричны относительно точки $\pi/2$, поскольку, когда аргумент x пробегает промежуток $[0; \pi/2]$, аргумент $(\pi - x)$ пробегает в обратном направлении промежуток $[\pi/2; \pi]$. Поэтому (так как график функции $y = \sin x$ симметричен относительно прямой $x = \pi/2$) можно ограничиться построением графика в промежутке $[0; \pi/2]$.

В промежутке $[0; \pi/2]$ функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от 0 до 1. Для приближенного построения графика функции $y = \sin x$ на числовой единичной окружности в промежутке $[0; \pi/2]$ отметим точки, соответствующие дугам 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$ (рис. 90). Затем нанесем эти значения аргумента на ось Ox_1 (здесь

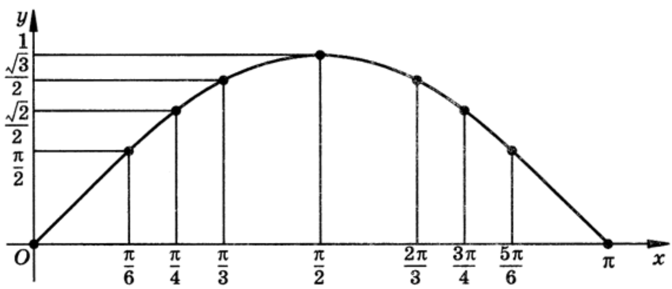


Рис. 91

$\pi/2$ составляет $\approx 1{,}57$ длины радиуса единичной окружности). Построив ординаты, соответствующие значениям синусов этих аргументов, и соединив их плавной линией, получим кривую, приближенно представляющую собой график синуса. Построение графика будет тем точнее, чем больше точек будет нанесено.

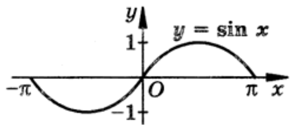


Рис. 92

На рисунке 91 изображен график функции синуса в промежутке $[0; \pi]$, полученный отражением графика рисунка 90 относительно прямой $x = \pi/2$. На рисунке 92 показан график функции синуса в промежутке $[-\pi; \pi]$, полученный из графика рисунка 91 отражением его относительно начала координат. График синуса называется ***синусоидой***. На рисунке 93 изображена синусоида на интервале $(-2\pi; 2\pi)$.

Основные свойства функции $y = \sin x$

I. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

II. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

III. Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$.

IV. Функция $y = \sin x$ нечетная.

V. Функция $y = \sin x$ принимает значения, равные нулю, в точках $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— наименьшие значения, равные -1, при $x = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— наибольшие значения, равные 1, при $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI. Функция принимает положительные значения на интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— отрицательные значения — на интервалах $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

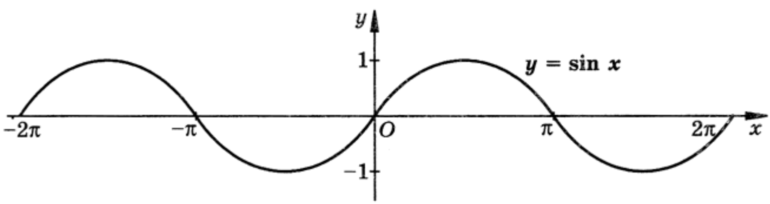


Рис. 93

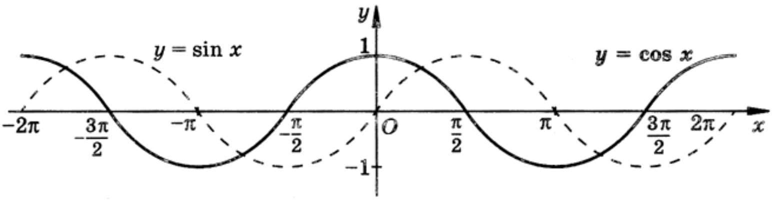


Рис. 94

VII. На отрезках $[-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ функция является возрастающей, на отрезках $[\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ функция является убывающей.

2. Основные свойства и график функции $y = \cos x$. График функции $y = \cos x$ можно построить исходя из соотношения $\cos x = \sin (x + \pi/2)$. Из этого выражения следует, что график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ путем сдвига графика функции синуса влево на $\pi/2$ (рис. 94). График косинуса называется ***косинусоидой***.

Основные свойства функции $\cos x$

I. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

II. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

III. Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$.

IV. Функция $y = \cos x$ четная. График функции симметричен относительно оси Oy.

V. Функция $y = \cos x$ принимает значения, равные нулю, в точках $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшие значения, равные -1, при $x = (-\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— наибольшие значения, равные 1, при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI. Функция принимает положительные значения на интервалах $(-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Функция принимает отрицательные значения на интервалах $(\pi/2 + 2\pi k; 3\pi/2 + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VII. На отрезках $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ функция является возрастающей, на отрезках $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$ функция является убывающей.

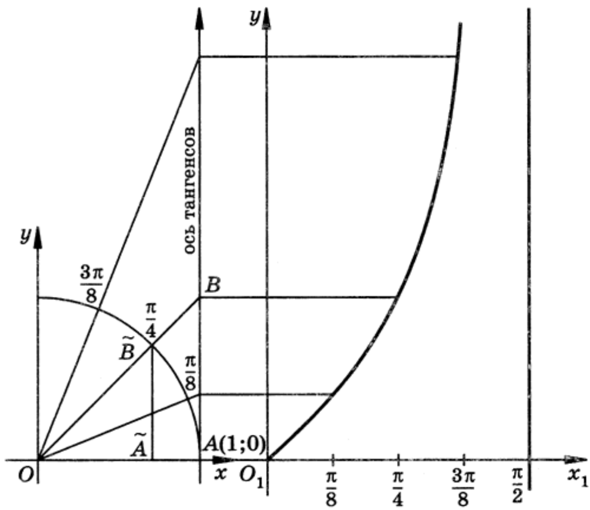


Рис. 95

3. Основные свойства и график функции y = tg x. При построении графика функции $y = \operatorname{tg} x$ учитываем, что период тангенса равен π, поэтому график тангенса можно построить в промежутке $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Тангенс — функция нечетная, поэтому его график будет симметричен относительно начала координат. Таким образом, достаточно построить график в промежутке $[0;\ \pi/2)$. В этом промежутке тангенс неограниченно возрастает от нуля. На числовой единичной окружности (рис. 95) в промежутке $[0;\ \pi/2)$ нанесем точки 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$. Через точку A построим прямую $x = 1$, параллельную оси Oy. Эта прямая называется ***осью тангенсов***. Проведем из начала координат лучи, соответствующие углам $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, до их пересечения с осью тангенсов. Рассмотрим для примера $\triangle\, OAB$ и $\triangle\, O\tilde{A}\tilde{B}$. Очевидно, эти треугольники подобны ($\triangle\, OAB \sim \triangle\, O\tilde{A}\tilde{B}$), поэтому

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\tilde{A}\tilde{B}}{O\tilde{A}}. \qquad (*)$$

Так как по определению $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\tilde{A}\tilde{B}}{O\tilde{A}}$, а $OA = 1$, из (*) следует, что $\operatorname{tg}(\pi/4) = AB$. Так же определяется и тангенс любого угла в интервале $[0;\ \pi/2]$: как отрезок на оси тангенсов, отсекаемый лу-

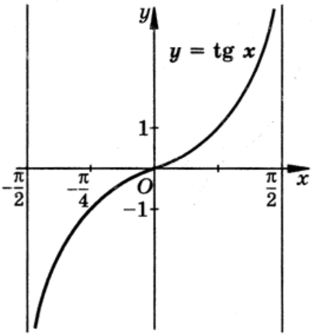


Рис. 96

чом, ограничивающим соответствующий угол. Учитывая это, строим график функции $\operatorname{tg} x$.

На рисунке 96 изображен график тангенса в промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$, полученный отражением графика в промежутке $[0; \pi/2)$ относительно начала координат. График тангенса называется ***тангенсоидой***. На рисунке 97 представлена тангенсоида, полученная последовательным переносом графика рисунка 96 вправо и влево на отрезки, кратные π.

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

I. Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

II. Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

III. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом $T = \pi$.

IV. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная. График функции симметричен относительно начала координат.

V. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает значения, равные нулю, при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— положительные значения на интервалах $(\pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
— отрицательные значения на интервалах $(-\pi/2 + \pi k; \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на следующих интервалах: $(-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

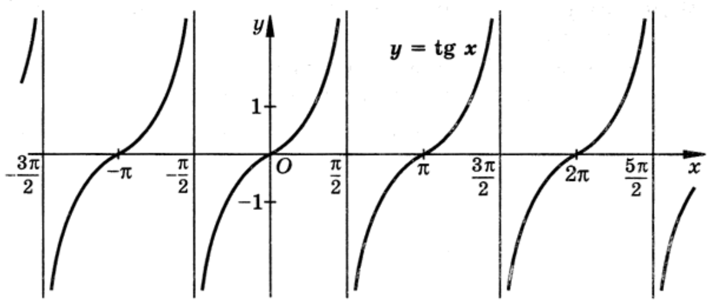


Рис. 97

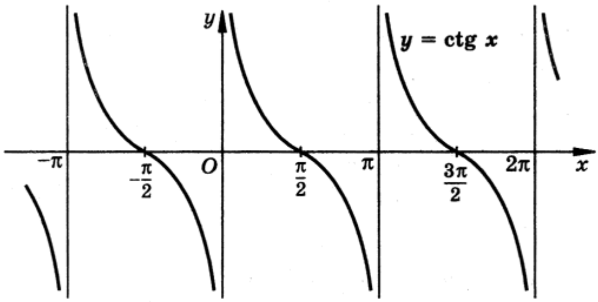


Рис. 98

4. Основные свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса необходимо сдвинуть график тангенса на $\pi/2$ влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox. График котангенса (рис. 98) называется ***котангенсоидой***.

Графики тангенса и котангенса состоят из бесконечного множества одинаковых периодически повторяющихся ветвей.

Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

I. Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

II. Множество значений — множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

III. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом $T = \pi$.

IV. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная.

V. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает значения, равные нулю при $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
— положительные значения на интервалах $(\pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$;
— отрицательные значения на интервалах $(-\pi/2 + \pi k; \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

VI. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ является убывающей на каждом интервале $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Постройте график синуса. С помощью графика опишите поведение функции синуса при изменении аргумента.
2. Таким же образом опишите поведение функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

§ 38. Обратные тригонометрические функции

1. Функция, обратная синусу. Известно, что областью определения функции $y = \sin x$ служит вся числовая ось: $x \in \boldsymbol{R}$ и каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции из промежутка $[-1; 1]$, а каждому значению функции соответствует множество значений аргумента.

Для функции, обратной синусу, необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между значениями аргумента и соответствующими значениями функции, чтобы избежать многозначного соответствия.

Для этого из множества значений аргумента рассматривают промежуток значений $x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Каждому значению аргумента из этого промежутка будет соответствовать только одно значение функции $y \in [-1; 1]$. Таким образом, множества значений аргумента и функции взаимно-однозначно отображаются друг на друга. Следовательно, функция синуса в промежутке $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ имеет монотонно возрастающую обратную функцию. Эта функция называется ***арксинусом*** и обозначается $y = \arcsin x$*.

Функция $y = \arcsin x$, заданная на промежутке $[-1; 1]$, монотонно возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (рис. 99). График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$ $(-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2)$ относительно прямой $y = x$.

Из определения функции $y = \arcsin x$ следует, что $\sin y = x$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1; 1]$, множеством значений — отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$.

Из определения функции $y = \arcsin x$ следует, что

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Главный угол (дуга), $\arcsin x$, есть угол (дуга), содержащийся в промежутке от $-\pi/2$ до $\pi/2$ $(-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2)$, синус которого равен x:

$$\mathbf{\sin(\arcsin x) = x.}$$

♦ ПРИМЕР

Вычислить значение $\arcsin x$ при: 1) $x_1 = \sqrt{3}/2$; 2) $x_2 = -1/2$; 3) $x_3 = 3$.

---

* *Arcus* — дуга (лат.).

РЕШЕНИЕ. 1) $\arcsin x_1 = \pi/3$, так как $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$;

2) $\arcsin x_2 = -\pi/6$, так как $\sin(-\pi/6) = -1/2$;

3) $\arcsin x_3$ не имеет смысла, так как число 3 не входит в область определения функции $\arcsin x$.

2. Функция, обратная косинусу. Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. В этом промежутке функция монотонно убывает от 1 до -1. Следовательно, множество значений аргумента $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и множество значений функции $-1 \leqslant x \leqslant 1$ взаимно отображаются друг на друга. Поэтому функция $y = \cos x$ в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ имеет монотонную убывающую обратную функцию. Эту функцию называют ***арккосинусом*** (рис. 100) и обозначают $y = \arccos x$. Функция $y = \arccos x$, заданная на промежутке $x \in [-1; 1]$, монотонно убывает от π до 0.

Из определения следует, что равенство $y = \arccos x$ равносильно утверждениям: $\cos y = x$, $y \in [0; \pi]$.

Областью определения функции $y = \arccos x$ является отрезок $[-1; 1]$, множеством значений — отрезок $[0; \pi]$.

Из определения функции $y = \arccos x$ следует, что

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Главный угол (дуга), $\arccos x$, есть угол (дуга), содержащийся в промежутке от 0 до π ($0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$), косинус которого равен x:

$$\cos(\arccos x) = x.$$

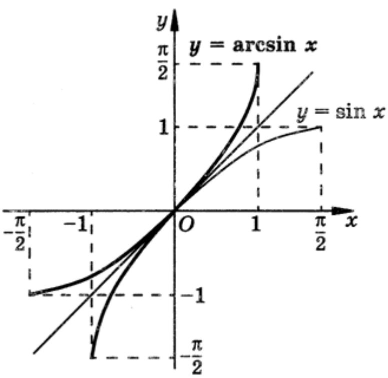


Рис. 99

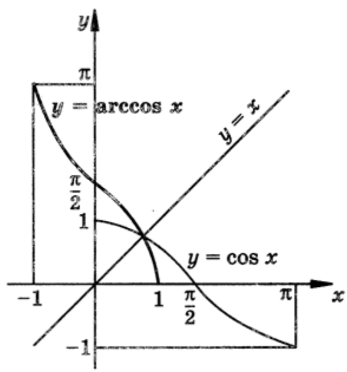


Рис. 100

♦ ПРИМЕР

Вычислить значение arccos x для: 1) $x_1 = 1/2$; 2) $x_2 = -\sqrt{2}/2$; 3) $x_3 = \sqrt{3}/2$.

РЕШЕНИЕ. 1) arccos $x_1 = \pi/3$; 2) arccos $x_2 = 3\pi/4$; 3) arccos $x_3 = \pi/6$.

3. Функция, обратная тангенсу. Функция $y = \operatorname{tg} x$ в промежутке $-\pi/2 < x < \pi/2$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому множество значений аргумента $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ и множество значений функции $y \in \boldsymbol{R}$ взаимно-однозначно отображаются друг на друга. Таким образом, для функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ существует монотонно возрастающая обратная функция (рис. 101). Эта функция называется ***арктангенсом*** и обозначается: $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$, заданная на промежутке $(-\infty; +\infty)$, монотонно возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Из определения следует, что равенство $y = \operatorname{arctg} x$ равносильно следующим утверждениям: $\operatorname{tg} y = x$, $y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Также по определению $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Приведем значения функции arctg x для некоторых значений аргумента: $\operatorname{arctg} \sqrt{3}/3 = \pi/6$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3$.

Главный угол (дуга), arctg x, есть угол (дуга), содержащаяся между $-\pi/2$ и $\pi/2$ $(-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2)$, тангенс которого равен x:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

4. Функция, обратная котангенсу. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ в промежутке $0 < x < \pi$ монотонно убывает от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, множество значений аргумента $x \in (0; \pi)$ и множество значений функции $y \in \boldsymbol{R}$ взаимно-однозначно отображаются друг на друга. Поэтому функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; 3\pi)$ имеет монотонно убывающую обратную функцию. Такую функцию называют ***арккотангенсом*** и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$.

Из этого следует, что равенство $y = \operatorname{arcctg} x$ равносильно следующим утверждениям: $\operatorname{ctg} y = x$, $y \in (0; \pi)$.

Областью определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$, т. е. множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, а множеством значений — интервал $(0; \pi)$.

Из определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ следует, что

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

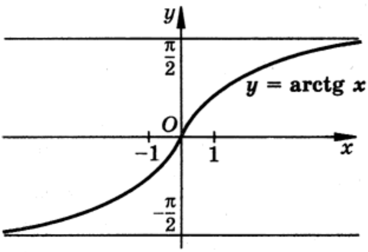


Рис. 101

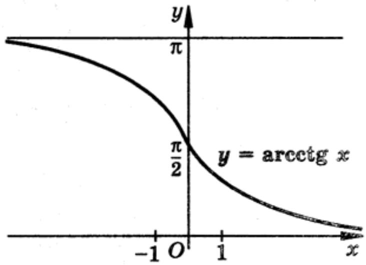


Рис. 102

График функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ изображен на рисунке 102.

Приведем значения функции $y = \mathrm{arcctg}\, x$ для некоторых аргументов: $\mathrm{arcctg}\, \sqrt{3} = \pi/6$; $\mathrm{arcctg}\, 1 = \pi/4$; $\mathrm{arcctg}\, 0 = \pi/2$.

Главный угол (дуга), $\mathrm{arcctg}\, x$, есть угол (дуга), содержащийся между 0 и π ($0 < \mathrm{arcctg}\, x < \pi$), котангенс которого равен x:

$$\mathrm{ctg}\, (\mathrm{arcctg}\, x) = x.$$

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ называются **обратными тригонометрическими функциями.**

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. На каком промежутке изменений аргумента задается функция $y = \arcsin x$?
2. Дайте определение функции $y = \arcsin x$.
3. Укажите область значений функции $y = \arcsin x$.
4. Постройте график функции $y = \arcsin x$.
5. Охарактеризуйте таким же образом функции $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

§ 39. Построение дуги (угла) по данному значению тригонометрической функции. Простейшие тригонометрические уравнения

1. Решение уравнения $\sin \alpha = a$. Построим единичную окружность (рис. 103), а также график функции $y = a$.

Рассмотрим случай $|a| < 1$; тогда прямая $y = a$ пересечет единичную окружность в точках M_1 и M_2, симметричных относительно Oy. Так как $a = \sin \alpha$, то точка M_1 получается из точки

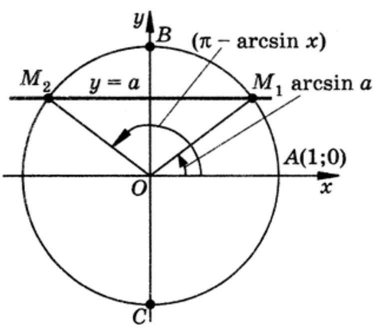


Рис. 103

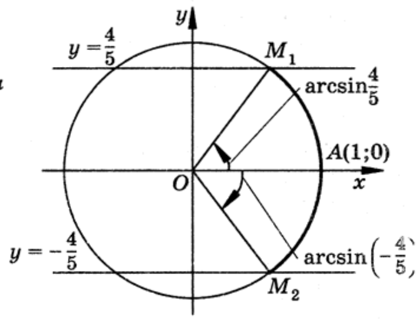


Рис. 104

$A(1;\ 0)$ поворотом на угол, равный $\arcsin a$, а точка M_2 — поворотом на угол, равный $(\pi - \arcsin a)$. Множество углов, дуги которых оканчиваются в точке M_1, определяется выражением $\alpha = \arcsin a + 2\pi k$, $k \pm 1, \pm 2, \ldots$, а множество углов, дуги которых оканчиваются в точке M_2, определяется выражением $\alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ или $\alpha = -\arcsin a + \pi(1 + 2k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Так как $(-1)^n = 1$ при $n = 2k$ (т. е. при четном n) и $(-1)^n = -1$ при $n = 2k + 1$ (т. е. при нечетном n), то можно объединить выражения для α в одну формулу:

$$\alpha = (-)1^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.106)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $a = \pm 1$. Точка $B(0;\ 1)$ отвечает случаю $a = 1$, а точка $C(0;\ -1)$ — случаю $a = -1$. Множество углов, дуги которых оканчиваются в точке B, выражается формулой $\alpha = \pi/2 + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$, а множество углов, дуги которых оканчиваются в точке C, — формулой $\alpha = -\pi/2 + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Отметим, что если $|a| > 1$, то уравнение $\sin \alpha = a$ не имеет корней.

Уравнение $\sin \alpha = a$ для $a \in [-1;\ 1]$ на отрезке $\alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2]$ имеет только один корень. Этот корень лежит в промежутке $[0;\ \pi/2]$, если $a \geqslant 0$, и в промежутке $[-\pi/2;\ 0)$, если $a < 0$.

♦ ПРИМЕР 1

Построить дугу, соответствующую $\arcsin (4/5)$ и $\arcsin (-4/5)$, лежащую в пределах $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

РЕШЕНИЕ. Решение выполним графическим способом (рис. 104), $\smile AM_1$ соответствует $\arcsin (4/5)$, $\smile AM_2$ соответствует $\arcsin (-4/5)$.

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\sin\alpha = 1/2$.

РЕШЕНИЕ. На единичной окружности имеются две точки, для которых $\sin\alpha = (1/2)$: $\alpha_1 = \arcsin(1/2) = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi - \arcsin(1/2) = \pi - \pi/6$. Таким образом, решение определяется выражениями $\alpha = \pi/6 + 2\pi k$ и $\alpha = -\pi/6 + \pi(2k+1)$, где $k = \pm1, \pm2, \dots$ или общим выражением

$$\alpha = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

2. Решение уравнения $\cos\alpha = a$. Построим единичную окружность и проведем прямую $x = a$, параллельную оси Oy (рис. 105).

Если $|a| < 1$, то прямая $x = a$ пересекает единичную окружность в точках M_1, M_2, симметричных относительно оси Ox. Так как $a = \cos\alpha$, точка M_1 получается из точки $A(1;\ 0)$ поворотом на угол, равный $\arccos a$, а точка M_2 — поворотом на угол, равный $(-\arccos a)$. Множество углов, дуги которых оканчиваются в точке M_1, определяется выражением $\alpha = \arccos a + 2\pi k$, $k = \pm1, \pm2, \dots$, а множество углов, дуги которых оканчиваются в точке M_2, определяется выражением $\alpha = -\arccos a + 2\pi k$, $k = \pm1, \pm2, \dots$. Эти две формулы можно объединить в одну:

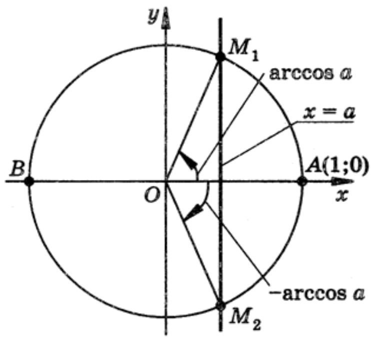


Рис. 105

$$\alpha = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (3.107)$$

Если $a = \pm1$, тогда точка $A(1;\ 0)$ отвечает случаю $a = 1$, а точка $B(-1;\ 0)$ отвечает случаю $a = -1$. Множество углов, дуги которых оканчиваются в точке A, выражается формулой $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а множество углов, дуги которых оканчиваются в точке B, — формулой $\alpha = \pi + 2\pi k = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отметим, что если $a > 1$, то уравнение $\cos\alpha = a$ не имеет корней.

Уравнение $\cos\alpha = a$ для $a \in [-1;\ 1]$ на отрезке $\alpha \in [0;\ \pi]$ имеет только один корень. Этот корень лежит в промежутке $[0;\ \pi/2]$, если $a \geqslant 0$, и в промежутке $(\pi/2;\ \pi]$, если $a < 0$.

Приведем примеры решения некоторых уравнений типа $\cos\alpha = a$: $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 = \pi/2$; $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2 \Rightarrow \alpha =$

$= \arccos(-\sqrt{2}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$; $\cos\alpha = -3/4 \Leftrightarrow \alpha = \pi - \arccos(3/4)$.

♦ ПРИМЕР 1

Построить дуги, соответствующие $\arccos(4/5)$ и $\arccos(-4/5)$, лежащие в пределах $[0; \pi]$.

РЕШЕНИЕ. Решение выполним графическим способом (рис. 106): $\cup AM_1$ соответствует $\arccos(4/5)$, $\cup AM_2$ соответствует $\arccos(-4/5)$.

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\cos\alpha = 1/2$.

РЕШЕНИЕ. На единичной окружности имеются две точки, для которых $\cos\alpha = 1/2$: $\alpha_1 = \arccos(1/2) = \pi/3$, $\alpha_2 = \arccos(1/2) = -\pi/3$. Таким образом, решение определяется общим выражением

$$\alpha = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3. Решение уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$. Известно, что функция $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать любые действительные значения. Поэтому уравнение $\operatorname{tg}\alpha = a$ имеет корни при любом значении a.

Построим единичную окружность и ось тангенсов (рис. 107). На оси тангенсов отметим точку N, ордината которой равна a. Через эту точку и начало координат проведем прямую, которая пересекает единичную окружность в точках M_1 и M_2. Из выводов § 37 п. 3 следует, что ордината a на оси тангенсов равна тангенсу угла $\angle OAM_1$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = a$, точке M_1 соответствует угол, равный $\operatorname{arctg} a$, а точке M_2 — угол, равный $\operatorname{arctg} a + \pi$. Множест-

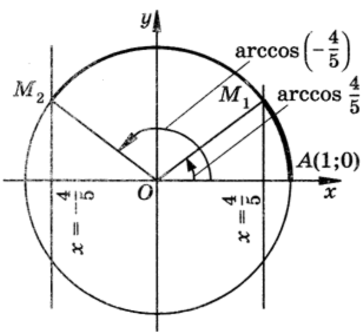


Рис. 106

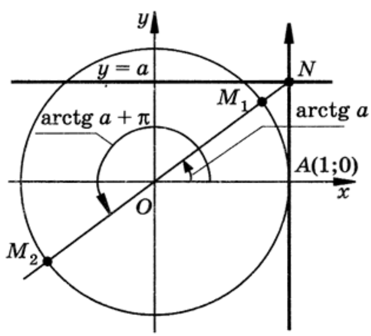


Рис. 107

во всех решений уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$ записывается следующим образом:

$$\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{3.108}$$

Уравнение $\operatorname{tg}\alpha = a$ имеет на интервале $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ только один корень. Этот корень заключен в промежутке $[0; \pi/2]$, если $a \geqslant 0$, и в промежутке $(-\pi/2; 0)$, если $a < 0$.

Приведем примеры решения некоторых уравнений типа $\operatorname{tg}\alpha = a$: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$; $\operatorname{tg}\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\pi/4$.

♦ ПРИМЕР

Построить дуги, соответствующие $\operatorname{arctg}(6/5)$ и $\operatorname{arctg}(-4/5)$, лежащие в пределах $(-\pi/2; \pi/2)$.

РЕШЕНИЕ. Решение проиллюстрировано рисунком 108: $\smile AM_1$ соответствует $\operatorname{arctg}(6/5)$, $\smile AM_2$ соответствует $\operatorname{arctg}(-4/5)$.

4. Решение уравнения ctg α = a. Уравнение $\operatorname{ctg}\alpha = a$ имеет корни при любом значении a, так как функция $\operatorname{ctg}\alpha$ может принимать любые действительные значения.

Построим единичную окружность и ось котангенсов (рис. 109), которая имеет уравнение $y = 1$. На этой оси отметим точку N, абсцисса которой равна a. Через эту точку и начало координат проведем прямую, которая пересекает единичную окружность в точках M_1 и M_2. Аналогично рассуждениям, приведенным в § 37 п. 3 для функции $\operatorname{tg}\alpha$, можно показать, что абсцисса точки a соот-

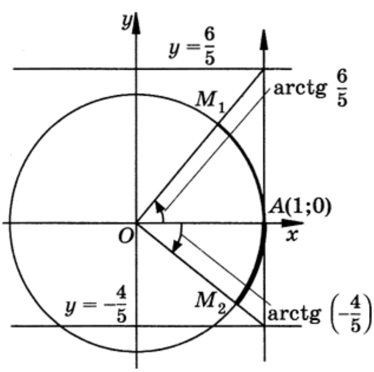


Рис. 108

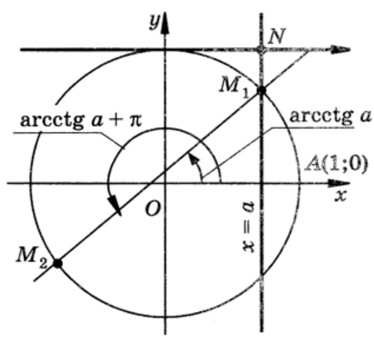


Рис. 109

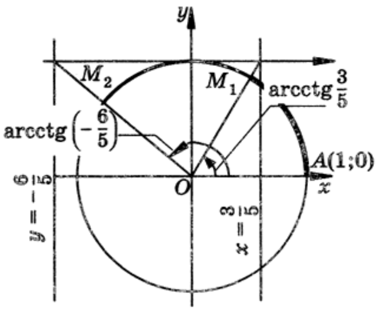


Рис. 110

ветствует котангенсу угла $\angle AOM_1$. Так как $a = \operatorname{ctg}\alpha$, точке M_1 соответствует угол, равный $\operatorname{arcctg} a$, а точке M_2 — угол, равный $\operatorname{arcctg} a + \pi$. Множество всех решений уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = a$ записывается общей формулой

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (3.109)$$

Уравнение $\operatorname{ctg}\alpha = a$ имеет для любого $a \in \boldsymbol{R}$ на интервале $\alpha \in (0;\ \pi)$ только один корень. Этот корень заключен в промежутке $(0; \pi/2]$, если $a \geqslant 0$, и в промежутке $(\pi/2; \pi)$, если $a < 0$.

Приведем примеры решения некоторых уравнений типа $\operatorname{ctg}\alpha = a$: $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcctg}(\sqrt{3}/3) = \pi/3$; $\operatorname{ctg}\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + \operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

♦ ПРИМЕР

Построить дуги, соответствующие $\operatorname{arcctg}(3/5)$ и $\operatorname{arcctg}(-6/5)$, лежащие в пределах $(0; \pi)$.

РЕШЕНИЕ. Решение проиллюстрировано рисунком 110: $\smile AM_1$ соответствует $\operatorname{arcctg}(3/5)$, $\smile AM_2$ соответствует $\operatorname{arcctg}(-6/5)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Запишите в общем виде решение уравнения $\sin\alpha = a$. Приведите примеры решения таких уравнений.
2. Проведите такой же анализ решения уравнений $\cos\alpha = a$, $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

§ 40. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения. Простейшими называются тригонометрические уравнения, рассмотренные в § 39. Они имеют вид $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\operatorname{tg} x = m$, $\operatorname{ctg} x = m$, где m — данное число. Приведем примеры более сложных уравнений такого типа.

♦ ПРИМЕР 1

Решить уравнение: 1) $\sin 2x = 1/2$; 2) $\operatorname{tg}(3x + 2) = -1$; 3) $\cos(\cos x) = 1/2$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (3.106) $2x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, следовательно, множество корней уравнения имеет вид $x = (-1)^n \pi/12 + \pi n/2$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) из формулы (3.108) следует, что $3x + 2 = -\pi/4 + \pi k$; следовательно, множество корней уравнения имеет вид $x = -2/3 - \pi/12 + \pi k/3$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

3) из формулы (3.107) следует, что $\cos x = \pm\pi/3 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, последнее уравнение не имеет корней, так как при любом $k \in \boldsymbol{Z}$ модуль его правой части $|\pm\pi/3 + 2\pi k| > 1$.

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение: 1) $\sin^2 x = m$, $m \in [0; 1]$; 2) $\operatorname{tg}^2 x = m$, $m > 0$.

РЕШЕНИЕ. 1) Уравнение распадается на два:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{m}, \\ \sin x = -\sqrt{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k + (-1)^k \arcsin\sqrt{m}, \\ x = \pi k - (-1)^k \arcsin\sqrt{m},\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

В этой записи множители $(-1)^k$, регулирующие знаки вторых членов, являются лишними, так как в зависимости от четности или нечетности k знаку «+» в первом решении соответствует знак «−» во втором и наоборот. Поэтому оба решения можно объединить в одно:

$$x = \pi k \pm \arcsin\sqrt{m}.$$

2) Уравнение распадается на два:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt{m}, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k + \operatorname{arctg}\sqrt{m}, \\ x = \pi k - \operatorname{arctg}\sqrt{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pi k \pm \operatorname{arctg}\sqrt{m},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным. Уравнение, являющееся или сводящееся к квадратному относительной одной тригонометрической функции, решается вначале как квадратное, а затем сводится к решению простейшего тригонометрического уравнения.

♦ ПРИМЕР 1

Решить уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $\sin x = y$, получим уравнение $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Его корни $y_1 = 1/2$, $y_2 = 3$. Таким образом, исходное уравнение свелось к решению простейших уравнений $\sin x = 1/2$ и $\sin x = 3$.

Решением первого уравнения является $x = (-1)^k \pi/6 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, второе уравнение не имеет решения.

◆ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $4\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Заменой $\cos^2 x$ на $(1 - \sin^2 x)$ сводим исходное уравнение к квадратному: $4\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$. Обозначив $\sin x = y$, получим уравнение $4y^2 - y - 3 = 0$. Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = -3/4$. Итак, исходное уравнение свелось к решению двух простейших уравнений: $\sin x = 1$, $\sin x = -3/4$. Их корнями являются $x_1 = \pi/2 + 2\pi k$, $x_2 = (-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. **Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.** Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением левой части на множители.

◇ ПРИМЕР 1

Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cos x + \operatorname{tg} x - \cos x - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение можно привести к виду $(\cos x + 1)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, при этом необходимо исключить возможные корни $x \neq \pi/2 + \pi k$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq \pi/2 + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi(2k+1), \\ x = \pi/4 + \pi k, \end{array}\right. \\ x \neq \pi/2 + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi(2k+1), \\ x = \pi/4 + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

◆ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$, $x \neq \pi/2 + \pi k$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg}^2 x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq \pi/2 + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \pm\pi/4 + \pi k, \end{array}\right. \\ x \neq \pi/2 + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \pi k, \\ x_2 = \pm\pi/4 + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}$$

4. **Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$.** Частным случаем уравнения подобного вида является уравнение со свободным членом, равным нулю, например $\sin x - \cos x = 0$. Поделим уравнение на $\cos x$, получим $\operatorname{tg} x - 1 = 0$. Решением этого уравнения является $x = \pi/4 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как при делении на выражение, содержащее неизвестное, могли быть потеряны корни, необходимо проверить,

не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из исходного уравнения следовало бы, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть одновременно равны нулю, так как они связаны соотношением $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\sin x$ или $\cos x$ получаем уравнение, равносильное данному.

Если уравнение имеет вид

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (*)$$

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то его можно решить следующим образом. Разделим обе части уравнения (*) на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (**)$$

Введем вспомогательный аргумент ψ такой, что

$$\cos \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Такое число ψ существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Поэтому уравнение (**) можно записать в виде

$$\sin x \cos \psi + \cos x \sin \psi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

По (3.63) последнее уравнение сводится к уравнению

$$\sin (x + \psi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

которое является простейшим тригонометрическим уравнением.

♦ ПРИМЕР

Решить уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

РЕШЕНИЕ. По отношению к уравнению (*) здесь $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Разделив обе части на 5, придем к уравнению

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент ψ такой, что $\sin\psi = 4/5$, $\cos\psi = 3/5$. Исходное уравнение запишется в виде $\sin x\cos\psi + \cos x\sin\psi = 1$, $\sin(x+\psi) = 1$, откуда

$$x + \psi = \pi/2 + 2\pi k, \text{ где } \psi = \arccos(3/5),$$
$$x = \pi/2 - \arccos(3/5) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Однородные уравнения*. Однородными называют тригонометрические уравнения, у которых левая часть является однородным многочленом относительно $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю. Такие уравнения сводят к уравнениям относительно $\operatorname{tg} x$.

♦ ПРИМЕР 1

$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$

РЕШЕНИЕ. Уравнение приводим к виду

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0,\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = 3,\end{array}\right.\\ x \neq \pi/2 + \pi k\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \pi/4 + \pi k,\\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\end{array}\right.\\ x \neq \pi/2 + \pi k\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi/4 + \pi k,\\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x - 4 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Умножив свободный член на $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, получим однородное уравнение

$$2\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$$

или

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Далее поступаем так же, как и в предыдущем случае:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = 3/2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi/4 + \pi k,\\ x = \operatorname{arctg}(3/2) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

---

* ***Однородными*** называются уравнения, в которых каждое слагаемое имеет одну и ту же степень.

6. Уравнения, решаемые с помощью введения вспомогательного аргумента. Некоторое число a можно рассматривать как значение тригонометрической функции от аргумента, называемого ***вспомогательным***, так как при любом значении a имеют место равенства $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$ и при $|a| \leqslant 1$ равенства $\sin(\arcsin a) = a$ и $\cos(\arccos a) = a$. Таким образом, алгебраическую сумму любых двух чисел можно представить в качестве алгебраической суммы тригонометрических функций и, следовательно, применять формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение.

♦ ПРИМЕР 1

Преобразовать в произведение с помощью введения вспомогательного уравнения выражение: 1) $f_1 = \sqrt{2}\,\sin\alpha + 1$; 2) $f_2 = 4\cos^2\alpha - 1$; 3) $a + b$.

РЕШЕНИЕ. 1) $f_1 = \sqrt{2}\,(\sin\alpha + 1/2) = \sqrt{2}\,(\sin\alpha + \sin(\pi/4))$. По формуле (3.93) последнее выражение приводится к

$$2\sqrt{2}\,\sin(\pi/8 + \alpha/2)\cos(\alpha/2 - \pi/8);$$

2) $f_2 = 4(\cos^2\alpha - 1/4) = 4(\cos\alpha - 1/2)(\cos\alpha + 1/2) = 4(\cos\alpha + \cos(\pi/3))(\cos\alpha - \cos(\pi/3))$.

По формулам (3.95) и (3.96) последнее выражение можно привести к виду $4 \cdot 2\cos(\alpha/2 + \pi/6)\cos(\alpha/2 - \pi/6) \cdot 2\sin(\alpha/2 + \pi/6) \times \sin(\pi/6 - \alpha/2)$.

Согласно формуле (3.71) имеем

$$4\sin(\alpha + \pi/3)\sin(\pi/3 - \alpha);$$

3) $f_3 = a(1 + b/a) = a(1 + \operatorname{tg}\varphi) = a(\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg}\varphi)$.

Используя формулу (3.97) и обозначение $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$, приходим к уравнению

$$a\frac{\sin(\pi/4 + \varphi)}{\cos(\pi/4)\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sin(\pi/4 + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3}\,\cos x = 2$.

РЕШЕНИЕ. Используем метод вспомогательного аргумента:

$$\sin x + \sqrt{3}\,\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\,\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos x\right) = 2\left(\cos(\pi/3)\sin x + \sin(\pi/3)\cos x\right) = 2\sin(x + \pi/3).$$

Таким образом, исходное уравнение преобразуется к виду
$2\sin(x + \pi/3) = 2 \Leftrightarrow (x + \pi/3 = \pi/2 + 2\pi k) \Leftrightarrow x = \pi/6 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие тригонометрические уравнения называются простейшими?
2. Что понимается под решением тригонометрического уравнения?
3. Перечислите основные способы решения тригонометрических уравнений.
4. Выведите формулы преобразования выражений $(1 \pm \cos\alpha)$ и $(1 \pm \sin\alpha)$ в произведение.
5. Как выполняются преобразования с помощью вспомогательного аргумента?

§ 41. Тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$$\sin x < m,\ \sin x > m,\ \cos x < m,\ \cos x > m,\ \operatorname{tg} x < m,\ \operatorname{tg} x > m,$$
$$\operatorname{ctg} x < m,\ \operatorname{ctg} x > m,\ \text{где } m \text{ — данное число.}$$

Решить простейшее тригонометрическое неравенство — значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

◈ ПРИМЕР 1

Решить неравенство: 1) $|\sin x| > 1/2$; 2) $\cos x > -1/2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Решение иллюстрируется рисунком 111: здесь точке M_1 соответствует угол $\pi/6$, M_2 — угол $5\pi/6$, M_3 — угол $\pi/6 + \pi$, M_4 — угол $5\pi/6 + \pi$. Неравенство выполняется для $\pi/6 < x < 5\pi/6$ и $\pi/6 + \pi < x < 5\pi/6 + \pi$. Общим решением служит неравенство

$$\pi/6 + \pi k < x \leqslant 5\pi/6 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2) Данное неравенство иллюстрируется рисунком 112: здесь точке M_1 отвечает угол $2\pi/3$, а точке M_2 — угол $-2\pi/3$. Общим решением неравенства является

$$-2\pi/3 + 2\pi k < x < 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

◈ ПРИМЕР 2

Решить неравенство: 1) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; 2) $\sin(x/2) > 1/2$.

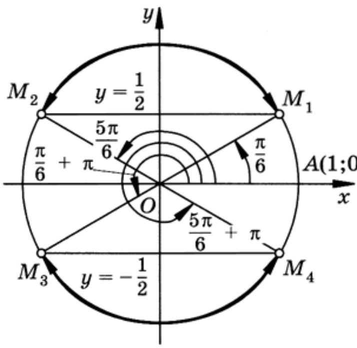


Рис. 111

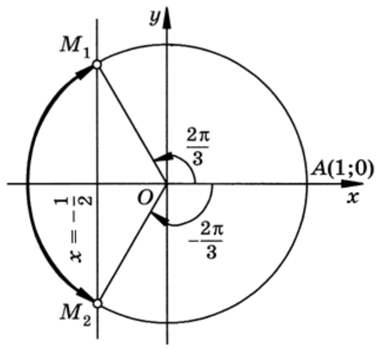


Рис. 112

РЕШЕНИЕ. 1) Учитывая свойство неограниченности функции $\operatorname{tg} x$, имеем $\operatorname{tg} x \in (\sqrt{3}; +\infty)$. Исходному неравенству удовлетворяют дуги из промежутка $x \in (\pi/3; \pi/2)$. Так как периодом для функции $\operatorname{tg} x$ является число π, общим решением является неравенство

$$\pi/3 + \pi k < x < \pi/2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2) Поскольку $\pi/6 + 2\pi k < x/2 < 5\pi/6 + 2\pi k$, решение имеет вид:

$$\pi/3 + 4\pi k < x < 5\pi/3 + 4\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ГЛАВА 4. Пределы

§ 42. Предел переменной величины

1. Понятие о числовой последовательности. Рассмотрим функциональную зависимость $y = x^2$:

x	1	2	3	4	5	...
y	1	4	8	16	25	...

Здесь значениями аргумента x являются натуральные числа, а функцией является числовая последовательность y.

Числовой последовательностью называется нумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров, т. е. являющееся функцией от натурального аргумента.

В общем виде числовая последовательность записывается следующим образом:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots .$$

Число u_n называется ***общим числом последовательности***.

Зная формулу общего члена последовательности, можно найти любой ее член (например, в арифметической и геометрической прогрессиях).

2. Характер изменения переменной величины. В математике и ее приложениях постоянно используются переменные величины.

Переменная величина может быть возрастающей, убывающей или переходить от возрастания к убыванию или наоборот.

Переменные, которые в процессе изменения или только возрастают, или только убывают, называются ***монотонными***.

По характеру изменения переменные величины подразделяются на ***ограниченные*** и ***неограниченные***.

Переменная величина y называется ограниченной, если начиная с некоторого ее значения выполняется неравенство

$$|y| < M,$$

где M — постоянное положительное число.

Например, значения функции $\sin x$ являются ограниченными величинами, так как $|\sin x| \leqslant 1$. На отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$ значения функции $\operatorname{tg} x$ являются ограниченными величинами.

Некоторые переменные являются неограниченными величинами, например, значения функции тангенса при изменении аргумента от 0 до $\pi/2$ неограниченно возрастают. Каким бы большим ни было положительное число N, значение $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$ превзойдет по своей величине это число N.

3. Бесконечно малая величина. Среди различных переменных величин особое место занимают бесконечно малые величины.

Переменная величина α называется ***бесконечно малой***, если она при своем изменении становится и затем остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε:

$$|\alpha| < \varepsilon. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Например, дробь $1/x$ при неограниченном возрастании абсолютной величины x является бесконечно малой величиной. Как бы мало ни было данное положительное число ε при неограниченном возрастании x, величина $1/x$ станет и останется меньше ε, т. е. $|1/x| < \varepsilon$.

Легко показать, что функция $y = \sin x$ при $x \to 0$ есть величина бесконечно малая, т. е. $\sin x \to 0$.

Не следует смешивать бесконечно малую величину с ничтожно малой, так как бесконечно малая является величиной переменной, а ничтожно малая остается постоянной.

Иначе говоря, никакая постоянная величина не может быть бесконечно малой, так как она по абсолютной величине не может стать меньше любого, сколь угодно малого наперед заданного положительного числа. Исключение из всех постоянных величин составляет нуль, ибо нуль всегда меньше любого, сколько угодно малого, положительного числа. Поэтому нуль считается бесконечно малой величиной.

Примерами бесконечно малых величин могут служить значения функций: $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 1$ при $x \to 1$, $y = 2^x$ при $x \to -\infty$.

4. Бесконечно большая величина.

Переменная величина y называется бесконечно большой, если, каким бы большим ни было наперед заданное положительное число N, абсолютная величина y становится и при дальнейшем изменении остается больше этого числа N:

$$|y| > N.$$

Термин ***бесконечно большая величина*** определяет характер изменения переменной величины, поэтому бесконечность не является числом. Каким бы большим ни было постоянное число, оно является конечным.

Например, функция $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \to 0$ неограниченно возрастает, т. е. $\operatorname{ctg} x \to +\infty$. Как бы велико ни было наперед заданное положительное число N, найдется такое значение аргумента x, близкое к нулю, для которого $\operatorname{ctg} x$ станет и в дальнейшем будет оставаться больше этого числа. Следовательно, $\operatorname{ctg} x$ является величиной бесконечно большой при $x \to 0$.

5. Связь бесконечно малой величины с бесконечно большой. Между бесконечно малой и бесконечно большой величинами существует связь, а именно:

I. Если x — величина бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой.

II. Если x — величина бесконечно малая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ является величиной бесконечно большой.

Например, если y — бесконечно большая величина, принимающая значения 1, 10, 100, 1000, ..., $y \to +\infty$, то $1/x$ получает соответственно значения 1, (0,1), (0,01), (0,001), ... $(1/x) \to 0$, т. е. оказывается бесконечно малой величиной.

Наоборот, если α — бесконечно малая величина, принимающая значения 1, (0,1), (0,001), (0,0001), ..., $\alpha \to 0$, то $1/\alpha$ получает соответственно значения 1, 10, 100, 1000, ... $(1/\alpha) \to +\infty$, т. е. оказывается бесконечно большой величиной.

6. Понятие о пределе переменной. Рассмотрим разность между площадью круга и площадью вписанного в этот круг правильного многоугольника: при неограниченном удвоении числа его сторон эта разность становится сколь угодно малой.

Пусть переменная x в процессе изменения неограниченно приближается к числу 2 и при этом принимает значения: $x = 2{,}1$; 2,01; 2,001; 2,0001 ... или $x = 1{,}9$; 1,99; 1,999; 1,9999 ... .

В каждом из этих случаев абсолютная величина разности $|x - 2| \to 0$, причем в первом случае значения переменных в процессе изменения остаются бóльшими 2, а во втором случае — меньшими 2.

Для приведенных значений переменной x абсолютная величина разности $|x - 2|$ принимает значения: 0,1; 0,01; 0,001; ..., т. е. модуль $|x - 2|$ есть величина бесконечно малая. В этом случае число 2 называется пределом переменной.

Постоянная a называется пределом переменной x, если разность $x - a = \alpha$ есть величина бесконечно малая.

Для обозначения предела используется символ lim*.

В частности, для предыдущего примера можно использовать запись $\lim x = 2$.

Говорят также, что переменная x стремится к пределу a, если разность $x - a = \alpha$ есть величина бесконечно малая.

Из равенства $x - a = \alpha$ следует, что $x = a + \alpha$. Таким образом, можно сформулировать утверждение.

Переменная величина x, имеющая своим пределом число a, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: постоянной a (предела a) и бесконечно малой α.

* *limes* — предел (лат.), *limite* (фр.).

Справедливо и обратное утверждение.

Если переменная величина x является суммой числа a и бесконечно малой α, то a есть предел переменной x.

Из определения предела следует, что:

I. Предел бесконечно малой равен нулю.

Если $\lim \alpha = 0$, то разность $\alpha - 0 = \alpha$ есть величина бесконечно малая.

II. Если $\lim \alpha = 0$, то α есть величина бесконечно малая.

Из равенства $\lim \alpha = 0$ следует, что разность $\alpha - 0$ есть величина бесконечно малая, но $\alpha - 0 = \alpha$; значит, α есть величина бесконечно малая. Другими словами, переменная, имеющая своим пределом нуль, является величиной бесконечно малой.

III. Постоянную можно рассматривать как переменную, принимающую одно и то же числовое значение, а постоянную, равную нулю, как бесконечно малую.

Покажем, что предел постоянной c равен самой постоянной c, т. е. $\lim c = c$. Пусть переменная x принимает одно и то же постоянное значение c, тогда $x - c = c - x = 0$, т. е. разность $x - c = 0$ есть величина бесконечно малая. Отсюда следует, что $\lim x = c$, т. е. $\lim c = c$.

Исходя из определения бесконечно малой величины, понятие предела можно сформулировать в следующей форме:

Число a называется пределом переменной величины x, если разность $|x - a|$ в процессе изменения x становится и при дальнейшем изменении x остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа ε, как бы мало это число ни было:

$$|x - a| < \varepsilon.$$

♦ ПРИМЕР

Пусть переменная $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ в процессе изменения аргумента x принимает соответствующие числовые значения. Определить $\lim y$ при $x \to 1$.

РЕШЕНИЕ. Составим таблицу значений аргумента x и функции y:

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	5,1	5,01	5,001	5,0001	...

Можно заметить, что $y \to 5$ при $x \to 1$, но для того, чтобы доказать, что $\lim y = 5$, необходимо показать, что $(y - 5) \to 0$, т. е. что разность $(y - 5)$ является бесконечно малой величиной.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5 = \frac{x^2 + 3x - 4 - 5x + 5}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = x - 1.$$

Сокращение на $(x - 1)$ корректно, так как при $x \to 1$ величина x не может принимать значения $x = 1$ и, таким образом, знаменатель не может оказаться равным нулю.

Разность $(x - 1) \to 0$ при $x \to 1$, т. е. является величиной бесконечно малой. Поэтому по определению число 5 является пределом переменной y:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5.$$

В дальнейшем будут рассмотрены более рациональные приемы вычисления предела функции.

7. Основные свойства бесконечно малых.

I. Бесконечно малая величина при перемене ее знака на противоположный остается бесконечно малой.

В определении бесконечно малой величины (4.1) фигурирует абсолютная величина переменной, поэтому равенство (4.1) справедливо при изменении ее знака.

II. Если α и β — бесконечно малые, то их сумма и разность тоже величины бесконечно малые.

Процесс изменения α и β при их приближении к нулю может быть различным, но по определению для сколь угодно малого положительного числа ε величи́ны α и β станут и будут оставаться меньше $\varepsilon/2$, т. е. $|\alpha| < \varepsilon/2$, $|\beta| < \varepsilon/2$, следовательно,

$$|\alpha| + |\beta| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Известно, что абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых, т. е. $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, поэтому из формулы (4.2) следует, что $|\alpha + \beta| < \varepsilon$. Таким образом, сумма $\alpha + \beta$ есть величина бесконечно малая.

Бесконечно малая β при перемене ее знака остается бесконечно малой; из предыдущего заключения следует, что разность $\alpha - \beta$ есть тоже бесконечно малая величина.

III. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых слагаемых есть величина бесконечно малая.

Это утверждение может быть доказано методом математической индукции с использованием предыдущего свойства.

IV. Произведение ограниченной величины x и бесконечно малой α есть бесконечно малая величина.

В процессе изменения величин x и α, начиная с некоторого момента будут сохраняться неравенства:

$$|x| < m,\ |\alpha| < \frac{\varepsilon}{m},$$

где m — положительное число, а ε — некоторое наперед заданное сколь угодно малое положительное число. Перемножив левые и правые части неравенств, получим

$$|x||\alpha| < \varepsilon.$$

Известно, что абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин: $|x||\alpha| = |x \cdot \alpha|$, поэтому $|x \cdot \alpha| < \varepsilon$, т. е. произведение $x \cdot \alpha$ является бесконечно малой величиной.

V. Произведение постоянной на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. Произведение нескольких бесконечно малых есть величина бесконечно малая. Целая положительная степень бесконечно малой есть величина бесконечно малая.

Эти утверждения справедливы, так как любое число и любая бесконечно малая величина являются ограниченными.

VI. Частное от деления двух бесконечно малых может быть величиной постоянной, или бесконечно малой, или бесконечно большой.

8. Теоремы о пределах.

■ ТЕОРЕМА I

Переменная величина не может иметь двух различных пределов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что переменная x имеет два различных предела $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, тогда по определению предела получим

$$x - \mathbf{A} = \alpha,\ x - \mathbf{B} = \beta,$$

где α и β — бесконечно малые.

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$x - \mathbf{A} - x + \mathbf{B} = \alpha - \beta \quad \text{или} \quad \alpha - \beta = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Левая часть этого равенства содержит разность двух бесконечно малых, т. е. величину бесконечно малую; правая часть является величиной постоянной. Бесконечно малая может равняться постоянной только в том случае, если постоянная равна нулю, следовательно, $\mathbf{B} - \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, т. е. переменная имеет только один предел.

СЛЕДСТВИЕ. Если две переменные величины, имеющие пределы, при всех своих изменениях равны между собой, то равны и их пределы.

■ ТЕОРЕМА II

Предел суммы конечного числа переменных, имеющих пределы, равен сумме пределов этих переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть переменные x и y имеют пределами числа $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, т. е.

$$\lim x = \mathbf{A}, \lim y = \mathbf{B}.$$

По определению предела имеем:

$$x - \mathbf{A} = \alpha, \ y - \mathbf{B} = \beta,$$

где α и β — бесконечно малые. Сложив эти равенства, приходим к соотношению $(x + y) - (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha + \beta$.

По определению предела имеем $\lim (x + y) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Учитывая формулу (4.3), получаем

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y.$$

■ ТЕОРЕМА III

Предел разности переменных, имеющих пределы, равен разности пределов этих переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание, что разность можно рассматривать как алгебраическую сумму, теорема II может быть распространена на разность переменных.

■ ТЕОРЕМА IV

Предел произведения конечного числа переменных, имеющих пределы, равен произведению пределов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть переменные x и y имеют своими пределами величины $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, тогда по определению предела имеем

$$x = \mathbf{A} + \alpha, \ y = \mathbf{B} + \beta,$$

где α и β бесконечно малые. Перемножив эти равенства, получим $xy = \mathbf{AB} + \mathbf{A}\beta + \mathbf{B}\alpha + \alpha\beta$ или $xy - \mathbf{AB} = \mathbf{A}\beta + \mathbf{B}\alpha + \alpha\beta$.

Левая часть представляет собой разность между произведением переменных xy и постоянной **AB**, а правая часть — сумму бесконечно малых, которая с учетом свойства III является также бесконечно малой величиной. Поэтому разность $(xy - \mathbf{AB})$ — величина бесконечно малая, следовательно, по определению предела

$$\lim (xy) = \mathbf{AB}$$

или

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Эта теорема может быть доказана для любого конечного числа переменных сомножителей.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предел произведения постоянной величины на переменную, имеющую предел, равен произведению постоянной на предел переменной, т. е. если a — постоянная, а x — переменная, то

$$\lim (ax) = a \lim x. \tag{4.4}$$

По теореме IV

$$\lim (ax) = \lim a \cdot \lim x,$$

но $\lim a = a$, из чего и следует формула (4.4).

СЛЕДСТВИЕ 2. Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени предела переменной, т. е.

$$\lim x^m = (\lim x)^m. \tag{4.5}$$

Число x^m является произведением m одинаковых сомножителей x, $x^m = \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m}$, тогда

$$\lim x^m = \lim (x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = \lim x \cdot \lim x \cdot \ldots \cdot \lim x = (\lim x)^m.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Предел корня из переменной, имеющей предел, равен корню той же степени из предела переменной, т. е.

$$\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}. \tag{4.6}$$

Представив $\sqrt[m]{x}$ в виде степени $x^{1/m}$, получим:

$$\lim \sqrt[m]{x} = \lim x^{1/m} = (\lim x)^{1/m} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

■ ТЕОРЕМА V

Предел частного от деления двух переменных, имеющих пределы, равен частному от деления пределов делимого и делителя при условии, что предел делителя не равен нулю, т. е.

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \lim y \neq 0. \tag{4.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim x = \mathbf{A}$, $\lim y = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \neq 0$.

Опустим доказательство существования предела $\frac{x}{y}$ ввиду сложности изложения, поэтому докажем только, что этот предел равен частному от деления $\lim x$ на $\lim y$.

Положим $\frac{x}{y} = z$, тогда $x = yz$. Полагая, что x, y и z имеют пределы, применим теорему IV о пределе произведения:

$$\lim x = \lim y \cdot \lim z \text{ или } \mathbf{A} = \mathbf{B} \lim z,$$

из чего следует, что

$$\lim z = \frac{A}{B}.$$

С учетом введенных обозначений получим формулу (4.7).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какая последовательность называется числовой последовательностью?
2. Каким может быть характер изменения переменной величины?
3. Какому условию должна удовлетворять ограниченная переменная величина? Приведите примеры ограниченных переменных величин.
4. Дайте определение бесконечно малой переменной. Приведите примеры бесконечно малых величин.
5. Какую переменную называют бесконечно большой?
6. Какая связь существует между бесконечно малой и бесконечно большой величинами?
7. Сформулируйте определение предела переменной величины.
8. Перечислите основные свойства бесконечно малых.
9. Перечислите теоремы о пределах переменных и следствия из них.

§ 43. Предел функции

1. Вычисление предела функции. Пусть функция $y = f(x)$ имеет своим пределом число $\mathbf{A}$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{A}$, причем $f(x)$ изменяется в зависимости от изменения переменной x. Необходимо учитывать, что при неограниченном стремлении переменной x к числу a $(x \to a)$ само число a исключается из значений, принимаемых переменной x. Дадим определение предела функции в точке.

> Число $\mathbf{A}$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{A}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - \mathbf{A}| < \varepsilon$.

При вычислении пределов функции используются теоремы, которые формулируются без доказательств.

ТЕОРЕМА I

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

ТЕОРЕМА II

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

ТЕОРЕМА III

Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$, предел функции $\varphi(x)$ отличен от нуля, то существует также предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to a} (kf(x)) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если n — натуральное число, то справедливы соотношения: $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$F(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n$$

при $x \to a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е.

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Предел дробно-рациональной функции

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

при $x \to c$ равен значению этой функции при $x = c$, если c принадлежит области определения этой функции, т. е.

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c).$$

Рассмотрим некоторые нестандартные ситуации, возникающие при вычислении пределов функций.

1. Функция представляет собой дробь, предел знаменателя которой равен нулю. Например, для $f_1 = \dfrac{5}{4x - 8}$ определим $\lim\limits_{x \to 2} f_1$. Теорему III о пределе частного применять нельзя, так как $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 8) = 0$. Таким образом, знаменатель f_1 есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x - 8}$, таким образом, есть величина бесконечно большая, поэтому $\lim\limits_{x \to 2} f_1 = \infty$.

2. Функция представляет собой дробь, пределы числителя и знаменателя которой равны нулю. Например, для $f_2 = \dfrac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$ определим $\lim\limits_{x \to 0} f_2$. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить $\lim\limits_{x \to 0} f_2$ нельзя, так как при $x \to 0$ это вычисление сведется к определению отношения двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, значение которого стремится к нулю при $x \to 0$, и таким образом сделать возможным применение теоремы III. При этом не производится сокращения на нуль: по определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению, никогда не достигая этого значения. Имеем

$$\lim_{x \to 0} f_2 = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \to 0} \frac{(3x - 2)}{(2x - 5)} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{2}{5}.$$

Подобный случай будет иметь место и при определении $\lim\limits_{x \to 0} f_3$ для $f_3 = \dfrac{x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}}$. Здесь необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $(\sqrt{5 - x} + \sqrt{5 + x})$ и затем, сократив дробь на x, вычислить

$$\lim_{x \to 0} f_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}.$$

♦ ПРИМЕР .

Определить $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

РЕШЕНИЕ. При вычислении такого предела нельзя применить теорему III о пределе частного, так как при $\alpha \to 0$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к нулю.

Обратимся к рисунку 81, на котором изображен единичный тригонометрический круг с дугой $\cup AM = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. Очевидно, что $M_1M < \cup AM < AN$ или $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $\sin\alpha > 0$, то, разделив это неравенство на $\sin\alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

или

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (*)$$

При $\alpha \to 0$ функция $\cos\alpha \to 1$ и неравенство (*) принимает вид

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Эквивалентными называются ***бесконечно малые***, предел отношения которых равен единице.

В последнем примере $\sin\alpha$ и α — эквивалентные бесконечно малые при $\alpha \to 0$. Величины $\operatorname{tg}\alpha$ и α при $\alpha \to 0$ также оказываются эквивалентными бесконечно малыми:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha/\cos\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \right) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\cos\alpha} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Отметим без доказательства, что отношение двух бесконечно малых величин можно заменить отношением эквивалентных величин, например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\lim\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

3. Функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин при стремлении аргумента к некоторому значению. Например, для функции $f_4=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$ определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_4$. Здесь, выполнив действие вычитания, получим дробь, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю при $x\to -2$. Далее поступаем, как и в случае с функцией f_2; сократив дробь на $(x+2)$, находим

$$\lim_{x\to\infty} f_4=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-4)}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.$$

4. Некоторые слагаемые функции пределов не имеют. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_5$ для функции $f_5=x^3-6x^2+5x-1$. Первые три слагаемых при $x\to\infty$ пределов не имеют, поэтому нет возможности непосредственно воспользоваться следствием 3. Вынося x^3 за скобки, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

(при $x\to\infty$ величины $\frac{6}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ и $\frac{1}{x^3}$ — бесконечно малые и их пределы равны нулю).

5. Знаменатель функции является величиной бесконечно большой. Например, определим $\lim\limits_{x\to\infty} f_6$ для $f_6=\frac{5}{4x+1}$. Так как знаменатель при $x\to\infty$ становится величиной бесконечно большой, то обратная ему функция $\frac{1}{4x+1}$ становится при $x\to\infty$ бесконечно малой. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину $\left(5 \cdot \dfrac{1}{4x+1}\right)$ есть величина бесконечно малая, следовательно, $\lim\limits_{x \to \infty} f_6 = 0$.

6. Функция представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой — величины бесконечно большие. Например, определим $\lim\limits_{x \to \infty} f_7$ для функции $f_7 = \dfrac{2x+3}{5x+1}$. При непосредственном применении теоремы III приходим к выражению $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поэтому для вычисления $\lim\limits_{x \to \infty} f_7$ необходимо числитель и знаменатель разделить на x:

$$\lim_{x \to \infty} f_7 = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

7. Функция представляет собой разность бесконечно больших величин. Например, определим $\lim\limits_{x \to \infty} f_8$ для функции $f_8 =$ $= x - \sqrt{x^2 - 4}$. Умножив и разделив функцию на выражение $x + \sqrt{x^2 - 4x}$, получим

$$\lim_{x \to \infty} f_8 = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x})(x + \sqrt{x^2 - 4x})}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/x}} = \frac{4}{2} = 2.$$

2. Число *e*. Натуральные логарифмы. Функция $z = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ имеет предел, выражающийся иррациональным числом; это число принято обозначать через e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Приведем значения функции $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ при увеличивающихся значениях аргумента n.

n	5	10	100	1000	10 000	100 000
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	2,4883	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,7182

Можно заметить, что при $n > 10\,000$ четыре первые знака значения функции остаются неизменными. Число 2,718 является приближенным значением числа e. Более точное его значение: $e = 2{,}7182818285$.

Если обозначить $\alpha = \dfrac{1}{n}$, то можно записать:

$$e = \lim_{\alpha \to \infty} (1 + \alpha)^{1/\alpha}.$$

Число e принято за основание логарифмов, называемых ***натуральными***. Натуральный логарифм числа N, как уже было отмечено в § 17, п. 5, принято обозначать $\ln N = \log_e N$.

♦ ПРИМЕР

Вычислить: 1) $L_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$; 2) $L_2 = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Имеем: $L_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x/3}\right)^{(x/3)\cdot 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right)^3 =$

$= \left(\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right)^3 = e^3;$

2) $L_2 = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + x}{x}\right)^{-x} = \left(\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{-1} = e^{-1} = 1/e.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Перечислите теоремы и следствия из них, на которых основано вычисление предела функции.
2. Что представляет собой число e?

§ 44. Непрерывность функции

1. Приращение аргумента и функции. Для функции $y = f(x)$ разность двух значений аргумента x_1 и x_2, лежащих в области определения функции, называется ***приращением аргумента*** и обозначается символом Δx, т. е. $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (из множества значений функции, которые она может принимать), соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2, называется ***приращением функции*** и обозначается символом Δy, т. е. $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$.

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$; если же $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$. Соответственно и приращение функции $\Delta y > 0$, если $y_2 > y_1$ и $\Delta y < 0$, если $y_2 < y_1$.

Пусть аргумент x получил приращение Δx, тогда новое значение аргумента есть $x + \Delta x$, а соответствующее ему значение функции есть $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Чтобы найти приращение функции, нужно из нового значения функции вычесть первоначальное:

$$-\begin{array}{l} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ y \qquad\quad = f(x) \\ \hline \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

♦ ПРИМЕР

Найти приращение функции $y = x^2 + x + 1$, если аргумент x изменил свое значение от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$.

РЕШЕНИЕ. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 0{,}5$. Вычислим значения функции $y_1(x_1)$ и $y_2(x_2)$:

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7,$$
$$y_2 = f(x_2) = f(2{,}5) = (2{,}5)^2 + 2{,}5 + 1 = 9{,}75.$$

Тогда

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 9{,}75 - 7 = 2{,}75.$$

2. Непрерывность функции. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Можно дать другое определение непрерывности функции.

> Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to a} \Delta y = 0$.

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют ***точкой разрыва функции***.

Степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации называют ***элементарными функциями***. Для элементарных функций справедливы следующие утверждения:

I. Область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т. е. элементарная функция непрерывна во всей области определения.

II. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках.

III. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

Функция называется ***непрерывной в промежутке*** (замкнутом или открытом), если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

♦ ПРИМЕР 1

Исследовать на непрерывность функцию $y = 3x$.

РЕШЕНИЕ. Функция $y = 3x$ определена для всех действительных значений аргумента x, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$. Область непрерывности функции совпадает с ее областью определения.

Найдем приращение функции Δy, если аргумент x получает приращение Δx.

$$-\begin{array}{l} y + \Delta y = 3(x + \Delta x) \\ y \qquad\;\; = 3x \\ \hline \qquad \Delta y = 3\,\Delta x \end{array}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to a} \Delta y = \lim_{\Delta x \to a} (3\,\Delta x) = 3 \lim_{\Delta x \to a} \Delta x = 0.$$

Равенство $\lim\limits_{\Delta x \to a} \Delta y = 0$ справедливо при любом конечном значении x, поэтому функция $y = 3x$ непрерывна при любом значении x.

♦ ПРИМЕР 2

Исследовать на непрерывность функцию $y = x^2 - 2$ при $x = 3$.

РЕШЕНИЕ. Предел функции: $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2) = (\lim\limits_{x \to 3} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$; значение функции $f(3) = 3^2 - 2 = 7$, т. е. предел функции при $x \to 3$ равен значению функции при $x = 3$. Следовательно, функция $y = x^2 - 2$ в точке $x = 3$ непрерывна.

Однако не все функции и не при любых значениях аргумента непрерывны. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ при $x = 0$ имеет разрыв.

Функция $y = \dfrac{2x}{x-5}$ имеет разрыв при $x = 5$; функция $y = \dfrac{3}{x^2-4}$ имеет разрывы при $x = -2$ и $x = 2$; функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы при $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется приращением аргумента и приращением функции?
2. Сформулируйте определения непрерывности функции.
3. Приведите примеры функций, имеющих разрывы.

ГЛАВА 5. Производная

§ 45. Скорость изменения функции

Если для некоторой функции $y = f(x)$ при изменении аргумента x на некоторую величину Δx функция y изменяется на Δy, т. е. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, то приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Средней скоростью изменения функции y для промежутка значений аргумента от x до $x + \Delta x$ называется отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

Мгновенной (истинной) скоростью изменения функции при данном значении аргумента x называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для линейной функции $y = kx + b$ средняя скорость $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$ и истинная скорость изменения функции $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$ совпадают; числовое значение истинной скорости равно коэффициенту k.

♦ ПРИМЕР 1

Найти среднюю скорость изменения функции $y = 3x^2 - 6$ при изменении x от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}5$.

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Приращение $\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$. Значения функции $y_1(x_1) = 3 \cdot 3^2 - 6 = 21$, $y_2(x_2) = 3 \cdot 3{,}5^2 - 6 = 30{,}75$. Приращение функции $\Delta y = 30{,}75 - 21 = 9{,}75$. Средняя скорость изменения функции:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9{,}75}{0{,}5} = 19{,}5.$$

2-й способ. Значение функции при $x = x_2$:

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 6 = 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6.$$

Поэтому $\Delta y = 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2$; приращение аргумента $\Delta x = 0{,}5$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot (0{,}5)^2}{0{,}5} = 19{,}5.$$

♦ ПРИМЕР 2

Прямолинейное движение точки задано уравнением $S = 3t^2 - 2t + 5$, здесь пройденный путь S выражен в м, время t — в с. Найти скорость движения точки в момент $t_0 = 5$.

РЕШЕНИЕ. Значение $S + \Delta S$ составляет

$$S + \Delta S = 3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) + 5,$$

поэтому

$$\Delta S = 6t\,\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\,\Delta t.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6t + 3\,\Delta t - 2.$$

Истинная скорость v движения точки в момент t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} \cdot (6t + 3\,\Delta t - 2) = 6t - 2.$$

Тогда истинная скорость движения точки в момент t_0:

$$v(5) = 6 \cdot 5 - 2 = 28 \text{ (м/с)}.$$

♦ ПРИМЕР 3

Закон падения материальной точки в пустоте выражается формулой $S = \frac{1}{2}gt^2$, где g — ускорение силы тяжести ($g = 9{,}8$ м/с),

t — время, S — путь, пройденный точкой за время t. Определить скорость движения точки в момент времени t.

РЕШЕНИЕ. Подобное движение является неравномерным, так как его закон выражается квадратной функцией. Значение $S + \Delta S$ составляет

$$S + \Delta S = \frac{1}{2} g(t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2),$$

поэтому

$$\Delta S = \frac{1}{2} g(2t\,\Delta t + (\Delta t)^2),$$

следовательно,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g(2t + \Delta t).$$

Поскольку отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ зависит и от t, и от Δt, понятие скорости неравномерного движения может быть отнесено только к определенному моменту времени t. Так как средняя скорость зависит от Δt, она тем точнее характеризует состояние падающей точки в момент t, чем меньшим выбирается отрезок Δt.

Мгновенная скорость v падения точки в момент времени t определяется как $\lim\limits_{\Delta t \to a} v_{\text{ср}}$, здесь $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость. Поэтому

$$v = \lim_{\Delta t \to a} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to a} \left(\frac{g}{2}\left(2t + \Delta t\right)\right) = gt.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как вычисляется скорость изменения функции?
2. Что называется мгновенной скоростью изменения функции?
3. Чему равны средняя и истинная скорость линейной функции?
4. Как вычисляется мгновенная скорость при неравномерном движении?

§ 46. Производная функции

1. Определение производной функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число Δx таково, что $x + \Delta x$ тоже принадлежит этому промежутку. Тогда ***производной функции*** $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (5.1)$$

если этот предел существует.

Если производная существует для каждого значения x в области определения функции $f(x)$, то она представляет собой новую функцию от аргумента x.

Процесс вычисления производной называется ***дифференцированием.***

С физической точки зрения производная от $f(x)$ в точке x представляет собой скорость изменения функции $f(x)$ относительно ее аргумента при данном значении x.

Производная функции имеет следующие обозначения: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y'_x.

Алгоритм определения производной функции

вычисляют приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

находят среднюю скорость изменения функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

вычисляют истинную скорость изменения функции при стремлении $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (5.2)$$

♦ ПРИМЕР

Определить производную функции $y = x^2$ при $x = 2$.

РЕШЕНИЕ. Вычисляем:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2,$$

следовательно,

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Средняя скорость изменения функции

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Тогда истинная скорость изменения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Находим значение производной при $x = 2$:

$$y'_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4.$$

2. Связь производной функции с непрерывностью. Сформулируем зависимость между непрерывностью и наличием производной функции.

> Если функция $f(x)$ имеет производную при некотором значении аргумента x, то при этом значении x данная функция непрерывна.

Допустим, что при некотором значении x функция $f(x)$ имеет производную, т. е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

По определению предела

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, отсюда $\Delta y = y'\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$. Находим предел этого выражения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y'\,\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha\,\Delta x) = 0.$$

Так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} (y'\,\Delta x) = 0, \ \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha\,\Delta x) = 0,$$

то $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

> Функцию $y = f(x)$ при данном значении x называют ***непрерывной***, если бесконечно малому приращению аргумента x соответствует бесконечно малое приращение функции y, т. е. если
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

3. Геометрический смысл производной. ***Касательной*** к данной кривой в данной ее точке A называется предельное положение секущей AB, когда точка B, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A.

Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к кривой в точке A.

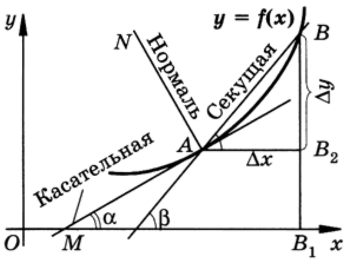


Рис. 113

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 113).

Отметим на этой кривой фиксированную точку $A(x;\ y)$, а также перемещающуюся по кривой точку $B(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$. Тогда расстояние от точки B до оси абсцисс $BB_1 = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Проведем прямую AB, пересекающую кривую $f(x)$ в точках A и B, и прямую AB_2, параллельную оси Ox.

Обозначим в прямоугольном треугольнике $\Delta\ ABB_2$ угол $\angle\ BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. с геометрической точки зрения $\operatorname{tg} \beta$ равен тангенсу угла наклона секущей AB к оси Ox.

При $\Delta x \to 0$ точка B, перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке A, секущая AB, поворачиваясь около точки A, стремится занять предельное положение касательной в точке A к кривой $f(x)$. При этом $\beta \to \alpha$, где α — угол, образуемый касательной AM с положительным направлением оси Ox, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha,\ \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из равенства $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = y'_x,$$

но $\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg} \alpha$ или $y'_x = k$, где k — угловой коэффициент касательной AM к графику функции $y = f(x)$ в точке A, равный тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k. \tag{5.3}$$

Итак, производная функции $y = f(x)$ в точке A равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке A.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется средней скоростью изменения функции?
2. Дайте определение производной функции.
3. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
4. Какая связь существует между непрерывностью функции и ее производной?
5. Объясните геометрический смысл производной.

§ 47. Формулы дифференцирования

1. Производная постоянной. Пусть $y = C$, где C — постоянное число. Тогда

$$y + \Delta y = C;\ \Delta y = y + \Delta y - y = C - C = 0;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0;\ y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Производная постоянной равна 0:

$$C' = 0. \qquad (5.4)$$

2. Производная функции $y = x$. В этом случае

$$y + \Delta y = x + \Delta x;\ \Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;\ y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 1 = 1.$$

Производная функции $y = x$ равна 1:

$$x' = 1. \qquad (5.5)$$

3. Производная алгебраической суммы функций. Для вывода ограничимся суммой двух слагаемых $y = u + v$, где u и v — функции от аргумента x, имеющие производные по x:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v;$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v = \Delta u + \Delta v;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x};$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Слагаемые правой части являются производными функций u и v, поэтому $y' = u' + v'$ или

$$(u + v)' = u' + v'. \tag{5.6}$$

Вывод можно распространить на алгебраическую сумму конечного числа слагаемых.

Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых.

Например, $y = 1 + x$, тогда $y' = 1$.

4. Производная произведения двух функций. Пусть $y = uv$, где u и v — функции от аргумента x, имеющие производные по x.

Находим:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v;$$
$$\Delta y = uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x};$$
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{α}$$

Функции u и v не зависят от Δx, поэтому будем считать их постоянными; по определению

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Функция u дифференцируема, следовательно, она непрерывна, поэтому $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, и последний член в ($\alpha$) равен нулю.

Тогда имеем:

$$(uv)' = uv' + vu'. \tag{5.7}$$

Производная произведения двух функций равна сумме произведений первой функции на производную второй и второй на производную первой.

5. Производная произведения постоянной на функцию. Пусть $y = Cu$, где C — постоянная, а $u = f(x)$, имеющая производную по x:

$$y' = (Cu')' = Cu' + uC' = Cu' + u \cdot 0,$$

т. е.

$$(Cu)' = Cu'. \tag{5.8}$$

Производная произведения постоянной на функцию равна произведению постоянной на производную функции (постоянную можно выносить за знак производной).

6. Производная частного. Дана функция $y = \dfrac{u}{v}$, где u и v — функции аргумента x, имеющие производные по x ($v \neq 0$). Тогда

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v};$$

$$\Delta y = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v + \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta v\right)} =$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Здесь, как и при выводе формулы (5.8), принято, что u и v не зависят от Δx и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta v = 0$.

Итак,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{5.9}$$

Производная частного равна дроби, числитель которой есть разность между произведением делителя на производную делимого и произведением делимого на производную делителя, а знаменатель есть квадрат делителя.

7. Следствия. Из (5.9) следует:

I. Если знаменатель дроби есть постоянная C, $y = \dfrac{u}{C}$, то

$$y' = \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u',$$

т. е.

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'. \tag{5.10}$$

Если знаменатель дроби — постоянная величина, то производная дроби равна производной от числителя, деленной на знаменатель.

II. Если числитель дроби есть постоянное число C, $y = \frac{C}{v}$, то

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{C'v - v'C}{v^2} = \frac{v - Cv'}{v^2} = -\frac{Cv'}{v^2},$$

т. е.

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}. \qquad (5.11)$$

Если числитель дроби — постоянная величина C, то производная равна числителю C, умноженному на производную знаменателя и деленному на квадрат знаменателя, взятому с противоположным знаком.

8. Понятие о сложной функции. Пусть дана функция $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Обозначим $x^2 + 1$ через u. Тогда $y = \sqrt{u}$ зависит от x через вспомогательную переменную u, а переменная u является функцией аргумента x.

Если для функции $y = \lg \sin x$ функцию $\sin x$ обозначить через u, то получим $y = \lg u$. В этом случае y также зависит от x через вспомогательную переменную u, которая является функцией аргумента x.

Такого рода функции называются ***сложными функциями*** или ***функциями от функции***.

В общем виде такие функции могут быть представлены следующим образом:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x). \qquad (5.12)$$

9. Производная сложной функции. Для нахождения производной от сложной функции рассмотрим равенства (5.12).

Если x получит приращение Δx, то u получит приращение Δu, а y получит приращение Δy ($\Delta u \neq 0$, $\Delta x \neq 0$).

Функции $f(u)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, поэтому из $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta u \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отношения $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ имеют пределы

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u),\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x).$$

Имеем очевидное равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

из которого следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\varphi'(x). \qquad (5.13)$$

Иначе, если сложная функция $y(x) = f(\varphi(x))$, то

$$\boldsymbol{f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).} \qquad (5.14)$$

> Если y является дифференцируемой функцией от u, а u является дифференцируемой функцией от x, то производная y по x равна произведению производной функции y по u на производную функции u по x.

10. Производная степени с целым положительным показателем. Пусть функция $y = u^n$, где $u = f(x)$, n — целое положительное число, т. е. y является сложной функцией.

Допустим, что функция u имеет производную по x. Рассмотрим, в частности, функцию $y = u^2$. Найдем производную этой функции по формуле (5.7):

$$(u^2)' = (u \cdot u)' = u' \cdot u + u \cdot u' = 2u \cdot u'.$$

Докажем методом математической индукции, что равенство, справедливое для $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, будет справедливо и для $(u^{n+1})' = (n+1)u^n u'$.

Представим u^{n+1} в виде $u^n \cdot u$ и по (5.7) найдем производную произведения:

$$(u^{n+1})' = (u^n \cdot u)' = (u^n)'u + u'u^n = nu^{n-1}u'u + u'u^n =$$
$$= nu^n u' + u'u^n = u^n \cdot u'(n+1) = (n+1)u^n u'.$$

Следовательно, если $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, то и $(u^{n+1})' = (n+1)u^n u'$.

Указанный закон верен для $(u^n)'$ и для $(u^{n+1})'$, т. е. он верен для любого целого положительного числа n.

Итак, для любого целого положительного показателя n

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'. \qquad (5.15)$$

Если $u = x$, то

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (5.16)$$

Приведем доказательство того обстоятельства, что формула (5.15) справедлива для любого значения $n \neq 0$.

Прологарифмируем равенство $y = u^n$ по основанию e, тогда

$$\ln y = n \ln u;$$

здесь $\ln y$ — сложная функция. Продифференцируем это соотношение по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

отсюда

$$y' = ny \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

поэтому

$$y' = nu^n \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = n \cdot u^{n-1} \cdot u',$$

где n — любое число, $n \neq 0$.

Например, $y = 3x^4$, $z = 5x^{-2/5}$. Тогда

$$y' = 3 \cdot 4x^3, \; z' = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)x^{-7/5} = -2x^{-7/5}.$$

11. Производная функции $y = \sqrt{u}$. При вычислении производной функции $y = \sqrt{u}$, где $u = f(x)$, заменим корень дробным показателем и применим формулу (5.15)

$$(\sqrt{u})' = (u^{1/2})' = \frac{1}{2} u^{1/2 - 1}u' = \frac{1}{2} u^{-1/2}u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}},$$

т. е.

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \qquad (5.17)$$

При $u = x$ имеем

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (5.18)$$

Например, $y = \sqrt{3x^2 - 1}$, тогда $y' = \dfrac{3 \cdot 2x}{2\sqrt{3x^2 - 1}} = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 1}}$.

12. Производная функции $y = \dfrac{1}{u}$. При выводе формулы производной функции $\dfrac{1}{u}$, где $u = f(x)$, заменим $\dfrac{1}{u}$ на u^{-1}, тогда $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -1u^{-2}$; $u' = -\dfrac{u'}{u^2}$, т. е.

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}. \qquad (5.19)$$

При $u = x$ имеем

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \qquad (5.20)$$

Например, $y = \dfrac{1}{x^4}$, тогда $y' = -\dfrac{4x^3}{(x^4)^2} = -4\dfrac{1}{x^5}$.

13. Применение формул дифференцирования. Определим производные некоторых функций:

1) $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$; 2) $z = \dfrac{x-a}{x+a}$; 3) $u = \sqrt[3]{(x^3+1)^2}$;

4) $v = x^2\sqrt{x^2 - 1}$.

Используя формулы (5.4)—(5.6), (5.8), (5.16), получаем:

1) $y' = (4x^3)' + (2x^2)' + x' - (5)' = 12x^2 + 4x + 1$;

2) учитывая формулы (5.4) и (5.9), получаем:

$$z' = \frac{(x-a)'(x+a) - (x+a)'(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{x + a - x + a}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2};$$

3) по формуле (5.14) находим

$$u' = ((x^3+1)^{2/3})' = \frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}(x^3+1)' = \frac{2}{3}(x^3+1)^{-1/3}\cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}};$$

4) используя формулу (5.14), получаем:

$$v' = (x^2\sqrt{x^2-1})' = (x^2)'\sqrt{x^2-1} + (\sqrt{x^2-1})'x^2 =$$

$$= 2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \pm\frac{2x(x^2-1) + x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3x^3 - 2x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Чему равна производная постоянной? Приведите доказательство.
2. Чему равна производная аргумента? Приведите доказательство.
3. Как вычисляется производная алгебраической суммы функции, произведения и частного функций?
4. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.
5. Как вычисляется производная сложной функции?
6. Выведите формулу производной степени для целого положительного показателя.

§ 48. Геометрические приложения производной

Геометрический смысл производной обсуждался в § 47, п. 3.

Изобразим кривую, являющуюся графиком функции, и отметим на ней точку $A(x_1; y_1)$ (рис. 114).

Производная функции $y = f(x)$ при $x = x_1$ равна угловому коэффициенту k_1 касательной MA, проведенной к кривой в точке с абсциссой $x = x_1$:

$$k_{1_{x=x_1}} = f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между касательной к данной кривой, проведенной через точку A, и положительным направлением оси Ox.

Уравнение касательной MN к кривой $y = f(x)$, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$, имеет вид

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \tag{5.21}$$

Так как по определению нормаль к кривой в точке перпендикулярна касательной, проведенной в этой точке, а условием перпендикулярности прямых является соотношение $k_1 \cdot k_2 = -1$ между их угловыми коэффициентами, то уравнение нормали NA имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_1). \tag{5.22}$$

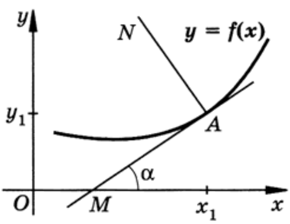


Рис. 114

Направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной к ней в этой точке, поэтому для нахождения угла наклона кривой в данной ее точке надо вычислить угол между касательной, проведенной в этой точке, и осью Ox.

◆ ПРИМЕР 1

Найти угол наклона параболы $y = x^2 - x + 1$ к оси Ox в точке $x_1 = -1$.

РЕШЕНИЕ. Для вычисления угла наклона кривой найдем $y'(x_1)$: $y' = 2x - 1$; $y'(x_1) = -3$; $k = \operatorname{tg} \alpha = -3$. По таблице определяем $\alpha = 108°26'$.

◆ ПРИМЕР 2

К параболе $y = 3x^2 - x$ в точке $x_1 = -1$ проведены касательная и нормаль. Составить их уравнения.

РЕШЕНИЕ. Ордината точки касания $y(-1)$ составляет $3(-1)^2 - (-1) = 4$, т. е. координаты точки касания: $(-1; 4)$. Угловой коэффициент $k_{x=-1}$ равен $y'(-1) = (3x^2 - x)'_{x=-1} = (6x - 1)_{x=-1} = -7$.

Составим уравнение касательной, подставив в (5.21) координаты $(-1; 4)$ и значение $k = -7$:

$$y - 4 = -7(x + 1) \Rightarrow 7x + y + 3 = 0.$$

Составим уравнение нормали, воспользовавшись (5.22):

$$y - 4 = -\frac{1}{-7}(x + 1) \Rightarrow x - 7y + 29 = 0.$$

◆ ПРИМЕР 3

Найти координаты точки A, в которой касательная к параболе $y = x^2 - x - 12$ образует угол в 45° с осью Ox.

РЕШЕНИЕ. Находим тангенс угла наклона касательной, проведенной в искомой точке к оси Ox:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = (x^2 - x - 12)' = 2x - 1.$$

По условию угол α равен 45°, следовательно, $\operatorname{tg} 45° = 1 = 2x - 1$, поэтому $x = 1$. Находим ординату искомой точки: $y(1) = 1^2 - 1 - 12 = -12$. Таким образом, координаты точки A: $(1; -12)$.

◆ ПРИМЕР 4

Найти, под каким углом ось Ox пересекает параболу $y = x^2 + x$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение оси Ox: $y = 0$. Поэтому решим систему

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Корни этой системы $x_1 = -1$; $x_2 = 0$. Парабола пересекает ось Ox в точках $A(-1; 0)$; $B(0; 0;)$.

Находим угловые коэффициенты касательных к параболе в точках A и B:

$y' = (x^2 + x)' = 2x + 1$; $k_{x=-1} = 2(-1) + 1 = -1$; $k_{x=0} = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Вычислим углы α_1 и α_2, образуемые касательными к параболе с осью Ox в точках A и B:

$$k_{x=-1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 135°;$$
$$k_{x=0} = \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Чему равна производная при данном значении аргумента с геометрической точки зрения?
2. Запишите уравнения касательной и нормали, проведенных через данную точку на кривой.
3. Как находится направление кривой в каждой ее точке?
4. Как вычисляется угловой коэффициент касательной в данной точке кривой?

§ 49. Физические приложения производной

При прямолинейном движении точки скорость v в данный момент $t = t_0$ есть производная $\frac{dS}{dt}$ от пути S по времени t, вычисленная для момента t_0.

Ускорение a в данный момент $t = t_0$ есть производная от скорости v по времени t, вычисленная для момента t_0.

♦ ПРИМЕР 1

Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

РЕШЕНИЕ. Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 + 2t.$$

Тогда скорость движения точки в момент t_0:

$$v(t_0) = 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2 = 104 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени t:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 12t + 2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0:

$$a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50\ (\text{м/с}^2).$$

При вращательном движении угловой скоростью называется скорость ω изменения угла поворота φ за время t. Угловая скорость равна производной угла поворота φ по времени t:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Угловое ускорение ε равно производной от угловой скорости ω по времени t:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

♦ ПРИМЕР 2

При торможении маховик за t (с) поворачивается на угол $\varphi = 3 + 8t - t^2$. Найти: 1) угловую скорость ω в момент времени $t_0 = 3$ с; 2) угловое ускорение ε в момент t_0; 3) момент времени t^*, когда вращение прекратится.

РЕШЕНИЕ. 1) Угловая скорость ω равна $8 - 2t$. Тогда в момент времени t_0 угловая скорость составляет $8 - 2 \cdot 3 = 2$ (рад/с); 2) угловое ускорение ε равно -2; таким образом, в любой момент времени оно составляет $\varepsilon = -2$; положив $\omega = 0$, найдем

$$8 - 2t^* = 0;\ t^* = 4\ (\text{с}).$$

Движение прекратится в момент t^*, так как в этот момент угловая скорость $\omega(t^*) = 0$.

Пусть при нагревании тела его температура T изменяется в зависимости от времени по закону $T = f(t)$. Тогда скорость нагревания тела — это производная температуры тела по времени $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$.

♦ ПРИМЕР 3

Закон изменения температуры тела T задан соотношением $T = 0{,}2t^2$, где t — время. С какой скоростью нагревается тело в момент времени $t_0 = 10$ с?

РЕШЕНИЕ. Скорость нагревания тела составляет $0{,}4t$. Тогда в момент времени t_0 эта скорость равна $0{,}4 \cdot 10 = 4$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как определяется скорость изменения функции при данном значении аргумента?
2. Как определяется ускорение прямолинейного движения точки при данном значении аргумента?
3. Какие физические задачи решаются с применением производной?

§ 50. Производные тригонометрических функций

1. Производная синуса. Пусть функция $y = \sin u$, где $u = f(x)$. Находим производную синуса по общему правилу:

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u);$$
$$\Delta u = \sin(u + \Delta u) - \sin u.$$

Выполним преобразования по формуле разности синусов (3.94):

$$\Delta u = 2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}.$$

Умножим числитель и знаменатель полученной дроби на $\frac{\Delta u}{2}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(u + \Delta u/2)\cdot\sin(\Delta u/2)\cdot\Delta u/2}{\Delta x\cdot\Delta u/2} =$$
$$= \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\cdot\frac{\sin(\Delta u/2)}{(\Delta u)/2}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция дифференцируема по x, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin(\Delta u/2)}{(\Delta u)/2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

С учетом примера на с. 205, в котором вычисляется $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, имеем

$$\lim_{\Delta u\to 0}\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) = \cos u,\ \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin(\Delta u/2)}{(\Delta u)/2} = 1,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Поэтому

$$(\sin u)' = \cos u\cdot u'. \qquad (5.23)$$

При $u = x$ имеем

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (5.24)$$

2. Производная косинуса. Пусть $y = \cos u$, где $u = f(x)$. Поскольку с учетом формулы для функции дополнительного аргумента (3.35) $\sin(\pi/2 - u) = \cos u$, определение производной косинуса сводится к (5.23):

$$(\cos u)' = \sin(\pi/2 - u)' = [\cos(\pi/2 - u)](\pi/2 - u)' =$$
$$= \sin u\,(-u)' = -\sin u \cdot u'.$$

Следовательно,

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \qquad (5.25)$$

При $u = x$

$$\cos x = -\sin x. \qquad (5.26)$$

3. Производная тангенса. Пусть $y = \operatorname{tg} u$, где $u = f(x)$. С учетом определения тангенса и правила дифференцирования сложной функции (5.14) получаем

$$(\operatorname{tg} u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{(\sin u)'\cos u - (\cos u)'\sin u}{\cos^2 u}.$$

С учетом соотношений (5.23) и (5.25) получим

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{(\cos u \cdot \cos u + \sin u \cdot \sin u)u'}{\cos^2 u} = \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\,u'.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} = u'. \qquad (5.27)$$

Если $u = x$, то

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \qquad (5.28)$$

4. Производная котангенса. Пусть $y = \operatorname{ctg} u$, где $u = f(x)$. С учетом того, что $\operatorname{ctg} u = \dfrac{1}{\operatorname{tg} u}$, воспользуемся соотношением (5.19):

$$(\operatorname{ctg} u)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} u}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 u/\cos^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'.$$

Таким образом,

$$(\mathbf{ctg}\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'. \qquad (5.29)$$

При $u = x$

$$(\mathbf{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 u} = -(1 + \mathbf{ctg}^2\ x). \qquad (5.30)$$

♦ ПРИМЕР

Определить производные функции 1) $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$; 2) $\varphi(x) =$ $= \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.

РЕШЕНИЕ. 1) Учитывая формулы (5.14) и (5.24), находим

$$f'(x) = \frac{(1 - \sin x)'(1 + \sin x) - (1 + \sin x)'(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{2\cos x}{(1 + \sin x)^2};$$

2) по формулам (5.28) и (5.30) получаем

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{4}{(2\sin x\cos x)^2} = -\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Приведите формулы для нахождения производных синуса и косинуса.
2. Выведите формулу производной тангенса. При каких значениях аргумента производная тангенса не имеет смысла?
3. Выведите формулу производной котангенса. При каких значениях аргумента производная котангенса не имеет смысла?

§ 51. Производные обратных тригонометрических функций

1. Производная арксинуса. Пусть $y = \arcsin u$, где $u = f(x)$. По определению арксинуса

$$\sin y = u. \qquad (*)$$

Функция $\sin y$ — сложная, так как $y = y(u)$, а $u = u(x)$, следовательно, $y = y(x)$.

Дифференцируем обе части (*) по x:

$$(\sin y)' = u' \Rightarrow \cos y \cdot y' = u',$$

следовательно, $y' = \dfrac{u'}{\cos y}$.

Воспользуемся соотношением cos $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ (здесь квадратный корень берется со знаком (+), так как $\arcsin u \in [-\pi/2; \pi/2]$, а на этом отрезке $\cos y \geqslant 0$), тогда

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

т. е.

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}. \qquad (5.31)$$

При $u = x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (5.32)$$

2. Производная арккосинуса. Пусть $y = \arccos u$, где $y = f(x)$. Так как $\arccos u = \pi/2 - \arcsin u$, то

$$(\arccos u)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right)' = (0 - \arcsin u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}. \qquad (5.33)$$

При $u = x$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (5.34)$$

3. Производная арктангенса. Пусть $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = f(x)$. Из определения арктангенса следует: $\operatorname{tg} y = u$. Дифференцируя по x, получим

$$(\operatorname{tg} y)' = u', \ \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = u',$$

откуда

$$y' = \cos^2 y \cdot u'.$$

Так как

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y},$$

то

$$y' = \frac{u'}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Следовательно,

$$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1 + u^2}. \tag{5.35}$$

При $u = x$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{5.36}$$

4. Производная арккотангенса. Пусть $y = \mathrm{arcctg}\, u$, где $u = f(x)$. Так как $\mathrm{arcctg}\, u = \pi/2 - \mathrm{arctg}\, u$, то

$$(\mathrm{arcctg}\, u)' = (\pi/2 - \mathrm{arctg}\, u)' = 0 - (\mathrm{arctg}\, u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}.$$

Итак,

$$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}. \tag{5.37}$$

При $u = x$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 - x^2}. \tag{5.38}$$

♦ ПРИМЕР

Найти производную функции: 1) $f(x) = 2 \arcsin x + \arccos x$; 2) $\varphi(x) = \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$; 3) $\psi(x) = (\arccos 3x)^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Имеем $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

2) $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{1 - (\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{1 + x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}}$;

3) $\psi'(x) = 2 \arccos 3x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - (3x)^2}}\right)(3x)' =$

$$= -2 \arccos 3x \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} = -\frac{6 \arccos 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулы производных арксинуса и арккосинуса.
2. При каких значениях аргумента существуют арксинус, арккосинус и их производные?
3. Выведите формулы производных арктангенса и арккотангенса.
4. При каких значениях аргумента существуют арктангенс, арккотангенс и их производные?

§ 52. Производная логарифмической функции

Производная функции $y = \ln u$, где $u = f(x)$, вычисляется по формуле:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}. \tag{5.39}$$

Доказательство, ввиду его сложности, не приводится. Если $u = x$, то

$$\ln x = \frac{1}{x}. \tag{5.40}$$

Производная десятичного логарифма $y = \lg u$ вычисляется по формуле

$$(\lg u)' = 0{,}4343 \cdot \frac{u'}{u}. \tag{5.41}$$

При $u = x$

$$(\lg x)' = 0{,}4343 \cdot \frac{1}{x}. \tag{5.42}$$

Здесь $0{,}4343 = \lg e$ — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным (см. § 17, п. 5), $\lg N = 0{,}4343 \ln N$.

Также без доказательства приведем выражение для определения производной от логарифма по любому основанию:

$$\log_a x = \frac{1}{x \ln a}. \tag{5.43}$$

Значения производных от логарифмов тригонометрических функций:

$$(\ln \cos x)' = \frac{1}{\cos x}\,(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x; \tag{5.44}$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x}\,(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x; \tag{5.45}$$

$$(\ln \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}; \quad (5.46)$$

$$(\ln \operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\,(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\,-\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{2}{\sin 2x}. \quad (5.47)$$

♦ ПРИМЕР

Найти производную функции: 1) $f(x) = \ln(ax^2 + b)$; 2) $\varphi(x) = \ln\sqrt{2x}$; 3) $\psi(x) = \lg(2x + 1)$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (5.39) находим:

$$f'(x) = \frac{1}{ax^2 + b}(ax^2 + b)' = \frac{2ax}{ax^2 + b};$$

2) учитывая формулы (2.12) и (2.15), получаем

$$\varphi'(x) = \left[\frac{1}{2}\,(\ln 2 + \ln x)\right]' = 0 + \frac{1}{2x};$$

3) по формуле (5.41) находим

$$\psi'(x) = \frac{0{,}4343}{2x + 1}(2x + 1)' = \frac{0{,}8686}{2x + 1}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выпишите формулы для вычисления производных функций $y = \ln u$, $y = \lg u$.
2. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих функции натуральных и десятичных логарифмов.

§ 53. Производные показательных функций

Пусть $y = a^u$ — показательная функция, причем $u = u(x)$, а a — постоянное число. Прологарифмируем выражение для y по основанию e:

$$\ln y = u \ln a; \quad (*)$$

здесь y — сложная функция аргумента x.

Продифференцируем равенство (*):

$$\frac{y'}{y} = u' \ln a,$$

тогда

$$y' = yu' \ln a = a^u u' \ln a,$$

т. е.

$$\mathbf{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.} \qquad (5.48)$$

При $u = x$

$$\mathbf{(a^x)' = a^x \ln a.} \qquad (5.49)$$

Если $a = e$, то

$$(e^u)' = e^u \ln e\, u' = e^u \cdot u',$$

таким образом,

$$\mathbf{e^u = e^u \cdot u',} \qquad (5.50)$$

при $u = x$

$$\mathbf{(e^x)' = e^x,} \qquad (5.51)$$

т. е. производная от функции e^x совпадает со значением самой функции.

♦ ПРИМЕР

Определить производную функции: 1) $f(x) = 3^{2x^2}$; 2) $F(x) = \ln x \cdot e^x$; 3) $\varphi(x) = x^2 e^x$; 4) $\psi(x) = 5 \ln x + e^x$.

РЕШЕНИЕ. 1) По формуле (5.48) имеем

$$f'(x) = 3^{2x^2} \ln 3\, (2x^2)' = 3^{2x^2} \ln 3 \cdot 4x;$$

2) $F'(x) = (\ln x)'e^x + (e^x)' \ln x = \dfrac{1}{x} e^x + e^x \ln x = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right);$

3) $\varphi'(x) = (x^2)'e^x + (e^x)'x^2 = 2xe^x + e^x x^2 = xe^x(2 + x);$

4) $\psi'(x) = \dfrac{5}{x} + e^x.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выведите формулу для производной от функции $y = a^u$.
2. Выведите формулу для производной от функции $y = e^u$.
3. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих в себя показательные функции.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$C' = 0$ (C — постоянная)

$x' = 1$

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$ (u, v, w — функции от x)

$(Cu)' = Cu'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$

$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$

$(\ln \sin x)' = \operatorname{ctg} x$

$(\ln \cos x)' = -\operatorname{tg} x$

$(\ln \operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\sin 2x}$

$(\ln \operatorname{ctg} x)' = -\frac{2}{\sin 2x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

§ 54. Производная второго порядка. Физический смысл производной второго порядка

1. Производная второго порядка. Если существует производная от производной y' функции $y = f(x)$, то она называется второй производной или производной второго порядка, т. е.

$$y'' = (f'(x))' = f''(x).$$

♦ ПРИМЕР

Найти вторую производную функции $y = x^3$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую производную: $y' = (x^3)' = 3x^2$. Полагая первую производную функцией, вычисляем вторую производную: $(y')' = (3x^2)' = 6x$, $y'' = 6x$.

2. Физический смысл второй производной. Пусть точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$; здесь S — путь, пройденный точкой за время t. Скорость движения точки, как было установлено в § 49, есть производная пути по времени $v = S' = f'(t)$.

Если точка движется неравномерно, то скорость за промежуток времени Δt получит приращение Δv. Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ показывает изменение скорости в единицу времени; оно называется ***средним ускорением*** за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Если приращение $\Delta t \to 0$, то $t + \Delta t \to t$, а среднее ускорение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ будет стремиться к ускорению a в данный момент времени t, т. е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} = v' = S''.$$

Следовательно, ускорение a прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

♦ ПРИМЕР

Точка движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 - 2t + 4$. Вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t_0 = 6$ с.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$v = S' = (3t^2 - 2t + 4)' = 6t - 2.$$

При $t = t_0$

$$v_0 = 6 \cdot 6 - 2 = 34 \text{ (с)}.$$

Ускорение a равно

$$a = S'' = (6t - 2)' = 6.$$

Ускорение является постоянной величиной при любом значении времени t, т. е. движение точки происходит с постоянным ускорением.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется производной второго порядка?
2. Что называется средним ускорением?
3. Что называется ускорением прямолинейного движения точки?
4. Как по закону движения точки $S = f(t)$ находится ускорение точки?

ГЛАВА 6. Исследование функций с помощью производных

§ 55. Возрастание и убывание функций

Основные понятия о возрастающих и убывающих функциях даны в § 14, п. 3.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если на некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция на этом промежутке возрастает; если же $f'(x) < 0$, то функция на этом промежутке убывает.

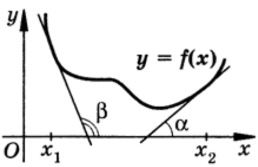


Рис. 115

На промежутке возрастания функции $y = f(x)$ касательная к графику функции образует с осью абсцисс острый угол, и график функции направлен вверх, т. е. $f'(x_2) = k_2 = \operatorname{tg} \alpha > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$ (рис. 115), а в промежутке убывания функции касательная к графику образует тупой угол, и график функции направлен вниз, т. е. $f'(x_1) = k_1 = \operatorname{tg} \beta < 0$, $\pi/2 < \beta < \pi$.

♦ ПРИМЕР

Найти промежутки возрастания и убывания функции: 1) $f(x) = x^2 - 8x + 13$; 2) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 4$; 3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$; 4) $\psi(x) = \ln x$.

РЕШЕНИЕ. 1) Производная $f'(x) = 2x - 8$; она принимает значение, равное нулю ($f'(x) = 0$) при $x = 4$. Вычислив значения $f'(x)$ для любого значения $x > 4$ (например, $f'(5) = 2$), заключаем, что на этом интервале производная $f'(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ на этом интервале возрастает, и наоборот, $f'(1) = -6$, при $x < 4$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, на этом интервале функция $f(x)$ убывает (рис. 116);

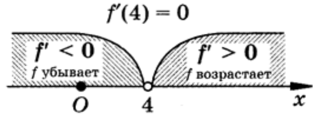


Рис. 116

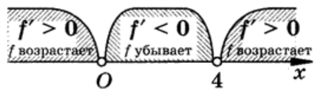


Рис. 117

2) $F'(x) = 3x^2 - 12x$; корни производной $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Вычислив значения производной на отдельных интервалах, делаем относительно поведения функции заключение, проиллюстрированное рисунком 117;

3) областью определения функции $\varphi(x)$ является вся числовая прямая, кроме точки $x = 0$. Производная $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Производная $\varphi'(x) < 0$ при всех значениях x из области определения функции, следовательно, функция убывает на интервалах $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; +\infty)$;

4) область определения функции $\psi(x)$ — интервал $x \in (0; \infty)$. Производная $\psi'(x) = \frac{1}{x}$ на этом интервале всегда положительна. Следовательно, функция $\psi(x)$ является возрастающей на всей области определения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие функции называются возрастающими и убывающими?
2. Объясните, как применяется производная для нахождения промежутков возрастания и убывания функции.
3. Сформулируйте практическое правило исследования функции на возрастание и убывание.

§ 56. Исследование функций на максимум и минимум

1. Понятие о максимуме и минимуме функции. Сформулируем правило определения тех значений аргумента, которые отделяют участки возрастания функции от участков убывания и наоборот.

Рассмотрим графики функций $f(x)$ (рис. 118) и $\varphi(x)$ (рис. 119). Если слева от некоторого допустимого значения $x = x_0$ функция $y = f(x)$ возрастает, а справа убывает, то значение $x = x_0$ называется ***точкой максимума*** данной функции, т. е. функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет максимум. Если слева от точки $x = x_0$ функция $y = \varphi(x)$ убывает, а справа — возрастает, то значение $x = x_0$ называется ***точкой минимума*** данной функции, т. е. функция $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум.

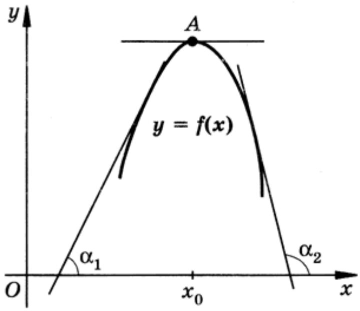


Рис. 118

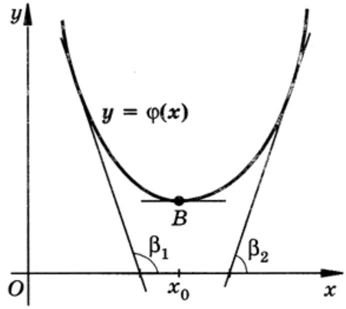


Рис. 119

Точка максимума служит границей перехода функции от возрастания к убыванию, а точка минимума — границей перехода функции от убывания к возрастанию.

Необходимо отметить, что функция может иметь либо только один максимум (например, функция $y = -x^2$) или только один минимум (например, функция $y = x^2$), либо множество максимумов и минимумов (например, $y = \sin x$), либо не иметь ни максимума, ни минимума (например, $y = \operatorname{tg} x$).

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки минимума и точки максимума называются ***точками экстремума***.

2. ПРИЗНАКИ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ФУНКЦИИ. Пусть на графике рисунка 118 точка A соответствует максимуму функции $y = f(x)$ при $x = x_0$. В точках, расположенных левее точки A, касательные образуют острые углы с положительным направлением оси Ox. Тангенсы этих углов положительны; следовательно, и производные в этих точках положительны, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$; $f'(x) > 0$ при $x < x_0$.

В точках, лежащих правее точки A, касательные образуют тупые углы с положительным направлением оси Ox, следовательно, и производные в этих точках отрицательны, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha_2$; $f'(x) < 0$ при $x > x_0$.

Так как производная функции непрерывна, то при переходе производной от положительных значений к отрицательным она пройдет через нуль при $x = x_0$, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются ***стационарными***.

Если при переходе через стационарную точку (такую, в которой производная функции равна нулю) x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с положительного на отрицательный, т. е. слева от точки x_0 значение $f'(x) > 0$, а справа от точки x_0 значение $f(x) < 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Если $f'(x) = 0$ в некоторой точке, то это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции в соответствующей точке также равен нулю, т. е. касательная в этой точке параллельна оси абсцисс.

Исследуем таким же образом график, изображенный на рисунке 119. Здесь точка x_0 соответствует минимуму функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$. Производные в точках, лежащих правее точки B, являются положительными (углы β_2 острые, тангенсы этих углов положительны), и наоборот, производные в точках, лежащих левее точки B, являются отрицательными (углы β_1 — тупые, соответствующие тангенсы меньше нуля). Так как производная функции непрерывна, то при переходе производной от отрицательных значений к положительным она обратится в нуль при $x = x_0$.

Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с отрицательного на положительный, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Признаки экстремума функции являются необходимыми и достаточными.

Отметим, что функция может иметь экстремум в точке, в которой эта функция не имеет производной (в качестве примера можно указать функцию $y(x) = |x|$; $f'(0)$ не существует; $x = 0$ — точка минимума функции). Стационарные точки, а также такие, в которых функция не имеет производной, в совокупности называются ***критическими точками*** этой функции.

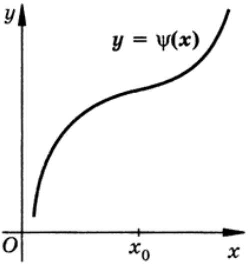


Рис. 120

Существуют функции, в которых первая производная, обращаясь в нуль при $x = x_0$, не меняет знака при переходе аргумента через x_0. В таком случае функция в этой точке не имеет экстремума. Пример подобной функции $y = \psi(x)$ приведен на графике рисунка 120. Таким образом, обращение первой производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

3. Практические правила исследования функции на максимум и минимум с помощью первой производной. Необходимо придерживаться следующего алгоритма:

I. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка $x = x_0$ есть точка минимума, если производная меняет знак при переходе через $x = x_0$. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x = x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x = x_0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

IV. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

♦ ПРИМЕР

Исследовать на экстремум функцию: 1) $f(x) = x^2 - 4x$; 2) $\varphi(x) = -x^2 + 5x - 6$; 3) $\psi(x) = x^3 - 3x^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим $f'(x) = 2x - 4$. Полагая $f'(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. В этой точке $f(2) = -4$. Слева от точки $x = 2$ производная $f'(x)$ имеет отрицательные значения, справа — положительные. Характер графика $f(x)$ представлен на рисунке 121;

2) находим $\varphi'(x) = -2x + 5$. Приравнивая производную к нулю, получаем критическую точку $x = 2{,}5$. В этой точке $\varphi(2{,}5) = 0{,}25$. Слева от критической точки $x = 2{,}5$ производная функции $\varphi(x)$ имеет положительные значения, справа — отрицательные. График соответствующей функции представлен на рисунке 122;

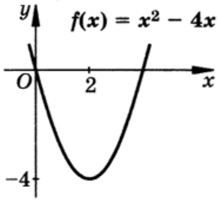


Рис. 121

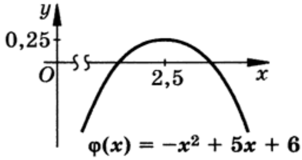


Рис. 122

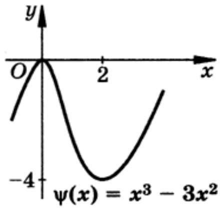


Рис. 123

3) находим $\psi'(x) = 3x^2 - 6x$. Уравнение производной имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. В этих точках $\psi(0) = 0$, а $\psi(2) = -4$. Производная имеет положительные значения слева от точки $x = 0$ и справа от точки $x = 2$ и отрицательные значения между этими точками. График, приведенный на рисунке 123, характеризует функцию $\psi(x)$.

4. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной. Если $f'(x)$ — производная от функции $y = f(x)$, то производная от f' (если она существует) называется ***второй производной*** (или ***производной второго порядка***). Для второй производной употребляются следующие обозначения: y'', y''_x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью второй производной

I. Найти производную $f'(x)$.

II. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.

III. Найти вторую производную $f''(x)$.

IV. Исследовать знак второй производной в каждой из критических точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то исследование функции нужно произвести с помощью первой производной.

V. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

♦ ПРИМЕР

Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию: 1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; 2) $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим производную $f'(x) = 2x - 2$. Из уравнения $f'(x) = 0$ получаем критическую точку $x = 1$. Находим вторую производную $f''(x) = 2$. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при $x = 1$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = -4$;

2) находим производную $\varphi'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ и корни производной: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Определим вторую производную $\varphi''(x) = 6x - 18$. Знаки второй производной в критических точках: $\varphi''(2) = 6 \cdot 2 - 18$; $\varphi''(2) < 0$, т. е. при $x = 2$ функция имеет максимум; $\varphi''(4) = 6 \cdot 4 - 18$; $\varphi''(4) > 0$, т. е. при $x = 4$ функция имеет минимум. Вычислим значения функции в точках x_1 и x_2:

$$\varphi_{\max} = \varphi(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8,$$
$$\varphi_{\min} = \varphi(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 4.$$

Итак, функция имеет максимум в точке (2; 8) и минимум в точке (4; 4).

5. Наименьшее и наибольшее значения функции. Сформулируем алгоритм определения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной в некотором промежутке.

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения: минимальное и максимальное из них являются соответственно минимумом и максимумом функции в рассматриваемом промежутке.

♦ ПРИМЕР 1

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на отрезке $x \in [0; 3]$.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $f'(x) = 2x - 4$; $x = 2$ — критическая точка. Находим $f(2) = -1$. Вычисляем значения функции на концах промежутка: $f(0) = 3$, $f(3) = 0$. Наименьшее значение функции $f(2) = -1$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение $f(0) = 3$ и достигается на левом конце промежутка (рис. 124).

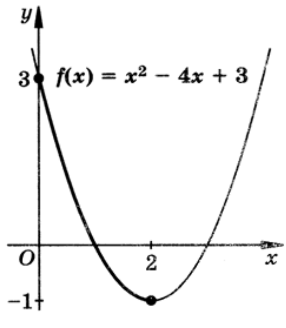


Рис. 124

♦ ПРИМЕР 2

Из всех прямоугольников с одинаковым периметром найти тот, у которого площадь наибольшая.

РЕШЕНИЕ. Обозначим периметр прямоугольника через p, длину одной из сторон прямоугольника через x, тогда длина другой стороны равна $(p - 2x)/2 = p/2 - x$. Обозначив площадь прямоугольника через y, получим

$$y = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2,\ 0 < x < \frac{p}{2}.$$

Исследуем функцию на максимум и минимум с помощью второй производной: $y' = p/2 - 2x$; критическая точка $x = p/4$. Вторая производная $y'' = -2$. Вторая производная отрицательна, следовательно, функция имеет максимум при $x = p/4$. Таким образом, из всех прямоугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

♦ ПРИМЕР 3

Закон прямолинейного движения тела задан уравнением

$$S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8.$$

Найти максимальную скорость движения тела (S (м), t (с)).

РЕШЕНИЕ. Скорость движения тела — первая производная от пути по времени:

$$v = S' = -3t^2 + 18t - 24.$$

Исследуем функцию $v(t)$ на максимум и минимум с помощью второй производной: $v' = -6t + 18$; критическая точка $t = 3$; $v'' = -6$. Вторая производная отрицательна, следовательно, скорость является наибольшей при $t = 3$. Найдем величину скорости в момент $t = 3$:

$$v(3) = 3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = 3 \text{ (м/с)}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение максимума и минимума функции.
2. Приведите примеры функций, имеющих один максимум или минимум, множество максимумов и минимумов.

3. Приведите примеры функций, не имеющих ни максимума, ни минимума.
4. Укажите необходимые и достаточные признаки максимума и минимума функции.
5. Укажите признаки существования максимума и минимума функции.
6. В каких случаях функция не имеет ни максимума, ни минимума?
7. Изложите практические правила исследования функции на максимум и минимум с помощью первой производной.
8. Как исследуется функция на максимум и минимум с помощью второй производной?
9. Как находится наименьшее и наибольшее значения функции?

§ 57. Направление выпуклости графика

Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной к кривой, проведенной в любой точке этого промежутка (рис. 125).

Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой вверх*** в промежутке $a < x < b$, если она лежит ниже касательной к кривой, проведенной в любой точке этого промежутка (рис. 126).

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются ***промежутками выпуклости графика функции***.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной.

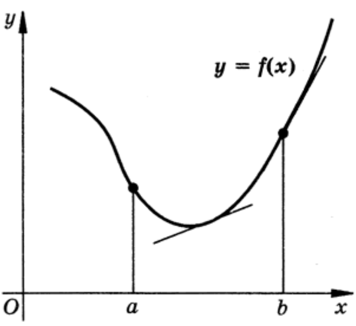


Рис. 125

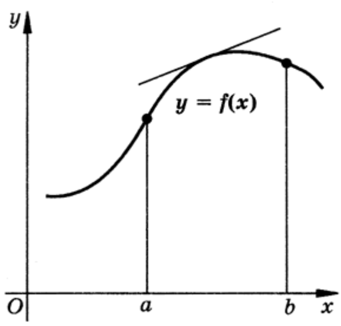


Рис. 126

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

♦ ПРИМЕР 1

Исследовать на выпуклость кривую $f(x) = \frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую и вторую производные $f(x)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, получим $f''(-2) = 2 \cdot \frac{1}{(-2)^3}$, $f''(-2) < 0$; $f''(1) = \frac{2}{1}$, $f''(1) > 0$. Следовательно, в точке $x = -2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x = 1$ — выпукла вниз.

♦ ПРИМЕР 2

Найти промежутки выпуклости кривой: 1) $\varphi(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим $\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi''(x) = 6x$. В промежутке $x \in (-\infty; 0)$ имеем $\varphi''(x) < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке $x \in (0; +\infty)$ вторая производная $\varphi''(x) > 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вниз (рис. 127);

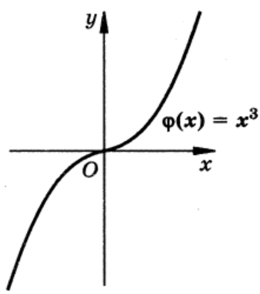


Рис. 127

2) находим $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$. Вычисляем корни второй производной: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. В промежутках $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (1; +\infty)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$, т. е. в этих промежутках кривая выпукла вниз, а в промежутке $x \in (0; 1)$ имеет место неравенство $f''(x) < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла вверх. Более подробно эта зависимость $f(x)$ будет исследована в § 58, примере 2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как определяется выпуклость кривой вверх и вниз?
2. Что понимается под промежутком выпуклости графика функции?
3. Как исследуется функция на направление выпуклости с помощью второй производной?

§ 58. Точки перегиба

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется ***точкой перегиба.***

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$. Если при этом критическая точка $x = x_0$ разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то $x = x_0$ является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

♦ ПРИМЕР 1

Найти точку перегиба кривой: 1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $\varphi(x) = x + \sqrt[3]{x^5 - 2}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$. Полагая $f''(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = 2$. Так как в промежутке $-\infty < x < 2$ имеем $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба. Находим ординату этой точки: $f'(2) = 16$. Итак, точка перегиба имеет координаты (2; 16);

2) находим $\varphi'(x) = \left(x + \frac{5}{x^3} - 2\right)' = 1 + \frac{5}{3}x^{2/3}$; $\varphi''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Здесь критической является точка $x = 0$, в которой вторая производная терпит разрыв.

Вторая производная $\varphi''(x) < 0$ в промежутке $-\infty < x < 0$ и $\varphi''(x) > 0$ в промежутке $0 < x < +\infty$, т. е. кривая $\varphi(x)$ имеет точку перегиба при $x = 0$; координаты этой точки $(0; -2)$.

♦ ПРИМЕР 2

Построить график функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, используя предыдущие исследования.

РЕШЕНИЕ. 1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной и не является периодической.

3. Находим точку пересечения графика с осью Oy: при $x = 0$ значение функции $f(0) = -3$. Точки пересечения графика функции с осью Ox найти затруднительно, так как для этого необходимо решить кубическое уравнение $f(x) = 0$.

4. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Критические точки функции $f(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Эти точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$.

В первом и последнем из них $f'(x) > 0$, в промежутке $x \in (1; 3)$ производная $f'(x) < 0$. Следовательно, в промежутках $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (3; +\infty)$ функция возрастает, а в промежутке $x \in (1; 3)$ — убывает. При переходе через точку x_1 производная меняет знак с *плюса* на *минус*, а при переходе через точку x_2 — с *минуса* на *плюс*. Таким образом, $(1; 1)$ — точка максимума, а $(3; -3)$ — точка минимума.

Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 12$; из решения уравнения $f''(x) = 0$ получаем $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $x \in (-\infty; 2)$ и $x \in (2; +\infty)$. В первом из них $f'' < 0$, т. е. кривая выпукла вверх, а во втором $f'' > 0$, т. е. кривая выпукла вниз. Получили точку перегиба $(2; -1)$.

По полученным точкам построим приближенный график данной функции (рис. 128).

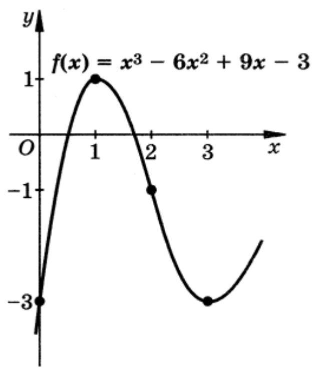


Рис. 128

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие точки графика называются точками перегиба?
2. Как исследуется функция на точки перегиба с помощью второй производной?
3. Сформулируйте правила исследования функции на точки перегиба.
4. Что необходимо знать для построения графика функции?

Глава 7. Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

§ 59. Сравнение бесконечно малых величин

Приведем примеры сравнения бесконечно малых величин при делении их друг на друга; в этих ситуациях могут представиться различные варианты. Пусть α, α^2 и 2α — бесконечно малые. Тогда возможно:

1) отношение $\alpha^2/\alpha = \alpha$ — бесконечно малая величина;
2) отношение $\alpha/\alpha^2 = 1/\alpha$ — бесконечно большая величина;
3) отношение $2\alpha/\alpha = 2$ — конечная величина;
4) отношение $\alpha/\alpha = 1$.

Первое отношение показывает, что α^2 составляет малую часть от α, следовательно, стремится к нулю быстрее, чем α. Из второго отношения видно, что делитель α^2 стремится к нулю быстрее, чем делимое α, т. е. при $\alpha \to 0$ величина $1/\alpha \to \infty$, следовательно, является величиной бесконечно большой. Из третьего отношения следует, что бесконечно малые α и 2α стремятся к нулю с одинаковой скоростью, поэтому при их изменении отношение $2\alpha/\alpha$ остается постоянным. Такие бесконечно малые называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***, а если их отношение равно единице, то они называются ***эквивалентными***.

Введем следующие определения:

I. Если α и β — бесконечно малые величины и $\lim (\alpha/\beta) = 0$, то α называется бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с β.

II. Если $\lim (\alpha/\beta) = a$ ($a \neq 0$), то бесконечно малые α и β одного порядка малости.

III. Если $\lim (\alpha/\beta) = \infty$, то α называется бесконечно малой низшего порядка малости по сравнению с β.

IV. Если $\lim (\alpha/\beta) = 1$, то бесконечно малые α и β называются эквивалентными.

◆ ПРИМЕР

Сравнить порядки малости следующих величин: 1) $x^2 + x^3$ и x, если $x \to 0$; 2) $5x + 3x^2$ и x, если $x \to 0$; 3) $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to 0$; 4) $\sqrt{x}$ и x при $x \to 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x + x^2) = 0$, бесконечно малая $(x^2 + x^3)$ имеет высший порядок малости по сравнению с x;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x + 3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (5 + 3x) = 5$, бесконечно малые $(5x + 3x^2)$ и x одного порядка малости;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sin x / \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, величины $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ одного порядка малости;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, бесконечно малая $\sqrt{x}$ имеет низший порядок малости по сравнению с x.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Перечислите различные варианты сравнения бесконечно малых величин.
2. Приведите примеры бесконечно малых высшего порядка малости.
3. Приведите примеры бесконечно малых одного порядка малости.
4. Какие бесконечно малые называются эквивалентными?
5. Когда отношение бесконечно малых стремится к бесконечности?

§ 60. Дифференциал функции

1. Понятие о дифференциале функции. Пусть дана функция $y = f(x)$, ее производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. По определению предела переменной имеем: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, следовательно,

$$\Delta y = y' \, \Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (7.1)$$

При уменьшении Δx первое слагаемое $y'\Delta x$ уменьшается пропорционально Δx, второе слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ уменьшается быстрее, чем $y' \Delta x$. Сравним их:

$$\frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = \frac{\alpha}{y'},$$

т. е. отношение $\frac{\alpha}{y'}$ — бесконечно малая при $y' \neq 0$. Отсюда следует, что $\alpha\,\Delta x$ бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с $y'\Delta x$.

В формуле (7.1) первое слагаемое $y'\Delta x$ называется ***главной частью приращения функции*** $y = f(x)$.

Главная часть $y'\Delta x$ приращения функции $y = f(x)$ называется ***дифференциалом функции***. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом $\mathrm{d}y$, т. е.

$$\mathrm{d}y = y'\,\Delta x. \qquad (7.2)$$

Дифференциал аргумента $y = x$ найдем по (7.2): $\mathrm{d}y = x'\,\Delta x = \Delta x$ или

$$\mathrm{d}x = \Delta x, \qquad (7.3)$$

т. е. дифференциал аргумента равен приращению аргумента, поэтому равенство (7.2) запишем в виде

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x. \qquad (7.4)$$

Из формулы (7.4) следует возможность нового обозначения производной:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad (7.5)$$

т. е. производная функции $y = f(x)$ есть отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Заменив в выражении (7.1) слагаемое $y'\Delta x$ дифференциалом функции $\mathrm{d}y$, получим

$$\Delta y = \mathrm{d}y + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (7.6)$$

В выражении (7.6) слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ есть величина бесконечно малая высшего порядка малости по отношению к $\mathrm{d}y$, поэтому слагаемое $\alpha \cdot \Delta x$ можно отбросить, допустив незначительную ошибку, и тем меньшую, чем меньше Δx.

Получили важное для приближенных вычислений равенство

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y. \qquad (7.7)$$

Для линейной функции $y = kx + b$ значение $\Delta y = \mathrm{d}y$.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка

$$\mathrm{d}^2y = f''(x)\,\mathrm{d}x^2. \tag{7.8}$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти дифференциал первого порядка функции: 1) $y = (x^3 - 2)^4$; 2) $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (7.4) имеем:

1) $\mathrm{d}y = ((x^3 - 2)^4)'\,\mathrm{d}x = 4(x^3 - 2)^3(x^3 - 2)'\,\mathrm{d}x = 4(x^3 - 2)^3 \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = 12x^2(x^3 - 2)^3\,\mathrm{d}x$;

2) $\mathrm{d}z = (\sqrt{x^2 - 1})'\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(x^2 - 1)'\,\mathrm{d}x = \dfrac{2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти дифференциалы второго порядка функции $y = e^{-x}$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (7.8)

$$y' = (e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -\,e^{-x};$$
$$y'' = (-e^{-x})'' = -\,e^{-x}(-x)' = e^{-x};$$
$$\mathrm{d}^2y = y''\,\mathrm{d}x^2 = e^{-x}\,\mathrm{d}x^2.$$

2. Геометрический смысл дифференциала функции. На рисунке 129 изображен график функции $y = f(x)$, направленный выпуклостью вниз. На кривой отмечены точки M и N с координатами $(x;\,y)$ и $(x + \Delta x;\,y + \Delta y)$ соответственно. В точке M к кривой проведена касательная, которая пересекает ось абсцисс под углом α. Обозначим через P_1 проекцию точки N на ось Ox, через P — проекцию точки M на вертикаль, опущенную из точки N на ось Ox, и через T — точку пересечения касательной с этой вертикалью. Тогда

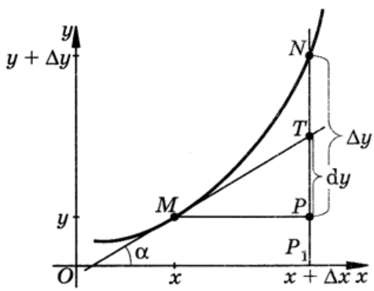


Рис. 129

$$P_1N = y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$
$$PN = \Delta y.$$

Угловой коэффициент k касательной равен производной функции $f(x)$, т. е. $k = \operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x)$.

Из $\triangle\, MPT$ имеем: $PT = \operatorname{tg} \alpha \cdot MP$; по формуле (7.3) $\triangle x = \mathrm{d}x$, т. е. $MP = \mathrm{d}x$, следовательно, учитывая формулу (7.4), получаем

$$PT = y'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

> Дифференциал $\mathrm{d}y$ функции $y = f(x)$ представляет собой приращение ординаты касательной, проведенной в данной точке кривой.

Поскольку $PN = PT + TN$, приращение функции $\triangle y = \mathrm{d}y + TN$, тогда, согласно формуле (7.6), $TN = \alpha \triangle x$, т. е. TN представляет собой часть приращения функции, которая при $\triangle x \to 0$ является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с $\triangle x$.

В рассматриваемом случае приращение $\triangle y$ превышает дифференциал $\mathrm{d}y$ на величину $\alpha \cdot \triangle x$:

$$\triangle y - \mathrm{d}y = \alpha \cdot \triangle x.$$

Приращение $\triangle y$ может оказаться и меньше $\mathrm{d}y$, например, когда кривая $y = f(x)$ будет направлена выпуклостью вверх.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Как обозначается дифференциал функции?
3. Чему равен дифференциал аргумента?
4. Что называется дифференциалом второго порядка?
5. Объясните геометрический смысл дифференциала функции.

§ 61. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

1. Абсолютная и относительная погрешности. Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Предположим, что величина x получена непосредственным измерением или в результате приближенного вычисления. Тогда при нахождении величины x допускается некоторая погрешность $\triangle x$.

Пусть x — приближенное значение аргумента (измеряемой величины), $\triangle x$ — абсолютная погрешность величины x, $\triangle x / x$ — относительная погрешность величины x, а $(x + \triangle x)$ — истинное значение измеряемой величины ($\triangle x$ может быть как положительным, так и отрицательным числом).

Тогда x определяет приближенное значение функции $f(x)$, а $(x + \Delta x)$ — ее истинное значение $f(x + \Delta x)$, из чего следует, что абсолютная погрешность функции

$$|\Delta y| = |(x + \Delta x) - f(x)|.$$

При близких к нулю значениях Δx величину Δy можно приближенно заменить дифференциалом $\mathrm{d}y$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Выгода замены приращения функции Δy ее дифференциалом $\mathrm{d}y$ состоит в том, что $\mathrm{d}y$ зависит от Δx линейно, а Δy представляет собой обычно более сложную зависимость от Δx.

Полагая $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, получим выражение для относительной погрешности ε величины y:

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|.$$

♦ ПРИМЕР

Сравнить относительные погрешности при вычислении площади круга радиуса $r = 125$ см, считая, что абсолютная погрешность равна: 1) приращению площади круга; 2) дифференциалу площади круга.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим приращение ΔS площади круга и относительную погрешность $\Delta S/S$ при вычислении площади круга $S = \pi r^2$. Будем считать, что погрешность при измерении радиуса не превышает $\pm 0{,}5$ см. Имеем $\Delta S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(2r\Delta r + (\Delta r)^2) = \pi(2 \cdot 125 \cdot 0{,}5 + 0{,}25) = 125{,}25\pi$;

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{125{,}25\pi}{\pi \cdot 125^2} = 0{,}008016 \approx 0{,}8\%;$$

2) найдем дифференциал $\mathrm{d}S$ и относительную погрешность $\mathrm{d}S/S$ при вычислении площади круга:

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi \cdot 125 \cdot 0{,}5 = 125\pi;\ \frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi r^2} = 2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Таким образом, относительная погрешность при вычислении площади круга равна удвоенной относительной погрешности, полученной при измерении радиуса:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = 2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r} = 2 \cdot \frac{0{,}5}{125} = 0{,}8\%.$$

Итак, во втором случае вычисления значительно проще и выполнены без ущерба для точности вычисления.

Определим относительную погрешность приближения при замене приращения ΔS дифференциалом $\mathrm{d}S$:

$$\Delta S - \mathrm{d}S = 125{,}25\pi - 125\pi = 0{,}25\pi;$$

$$\frac{\Delta S - \mathrm{d}S}{\mathrm{d}S} = \frac{0{,}25\pi}{125\pi} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

2. Вычисление приближенного числового значения функции. Пусть дана функция $y = f(x)$; приращение этой функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, ее дифференциал $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. При достаточно малых (близких к нулю) приращениях аргумента Δx будем считать, что $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, т. е. что приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

$$f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x + \Delta x) - f(x),$$

из чего следует

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.9}$$

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции; геометрически это соответствует замене участка кривой отрезком касательной.

ПРИМЕР 1

Найти приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = 6x^2\,\mathrm{d}x = 6 \cdot 2^2 \cdot 0{,}001 = 0{,}024.$$

Точное значение приращения

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5 - 2x^3 - 5 = 6x^2\,\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 =$$
$$= 6 \cdot 4 \cdot 0{,}001 + 6 \cdot 2 \cdot 0{,}000001 + 2 \cdot 0{,}000000001 = 0{,}024012002.$$

ПРИМЕР 2

На сколько увеличится при нагревании объем шара радиуса R, если его радиус удлинился на величину ΔR?

РЕШЕНИЕ. Объем шара вычисляется по формуле $V = (4/3)\pi R^3$. Считая приращение ΔR аргумента R малым, заменим приращение объема шара его дифференциалом: $\Delta V = \mathrm{d}V$. Следовательно, для вычисления приращения объема шара достаточно найти дифференциал функции $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, т. е. $\mathrm{d}V = 4\pi R^2\,\mathrm{d}R$.

♦ ПРИМЕР 3

Найти приближенное значение функции $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ при $x = 2{,}01$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$, получаем

$$f(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 39;$$
$$f'(x) = 15x^2 - 2;\ f'(2) = (15 \cdot 2^2 - 2) = 58;\ f'(2)\,\Delta x = 0{,}58.$$

По (7.9) $f(2{,}01) = 39 + 0{,}58 = 39{,}58$.

Сравним с точным значением функции: $f(2{,}01) = 5 \cdot (2{,}01)^3 - 2 \cdot 2{,}01 + 3 = 39{,}583005$.

3. Формулы для приближенных вычислений. Применяя соотношение (7.9), легко получить различные формулы для нахождения приближенных числовых значений. Рассмотрим формулы, имеющие практическое значение в приближенных вычислениях.

Выражение для приближенного вычисления степеней:

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\,\Delta x. \tag{7.10}$$

Приведем частные случаи формулы (7.10):

1) $n = 2$: $(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\Delta x$;

2) $n = 3$; $(x + \Delta x)^3 \approx (x^3 + 3x^2)\Delta x$;

3) $x = 1$, $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$.

Выражение для приближенного вычисления корней:

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \tag{7.11}$$

Рассмотрим частные случаи формулы (7.11):

1) $n = 2$: $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$;

2) $n = 3$: $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \dfrac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

3) $x = 1$: $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \dfrac{\Delta x}{n}$.

Выражение для приближенного вычисления обратных величин:

$$\frac{1}{x + \Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2}. \tag{7.12}$$

Приведем частные случаи формулы (7.12):

1) $\Delta x < 0$: $\dfrac{1}{x - \Delta x} \approx \dfrac{1}{x} + \dfrac{\Delta x}{x^2}$;

2) $x = 1$: $\dfrac{1}{x + \Delta x} \approx 1 - \Delta x$;

3) $x = 1$, $\Delta x < 0$: $\dfrac{1}{x - \Delta x} \approx 1 + \Delta x$.

Выражения для приближенного вычисления синусов и тангенсов малых углов: $\sin x \approx x$; $\operatorname{tg} x \approx x$.

♦ ПРИМЕР

Найти приближенное значение: 1) $(4{,}012)^2$; 2) $\sqrt{1{,}006}$; 3) $\dfrac{1}{1{,}004}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Полагая в соотношении (7.10) $x = 4$, $\Delta x = 0{,}012$, получим $(4 + 0{,}012)^2 \approx 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}012 = 16{,}096 \approx 16{,}1$; точное значение составляет 16,096144;

2) полагая в формуле (7.11) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}006$, получаем $\sqrt{1 + 0{,}006} \approx 1 + 0{,}006/2 = 1{,}003$;

3) полагая в (7.12) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}004$, получаем $1/(1 + 0{,}004) \approx$ $\approx 1 - 0{,}004 = 0{,}996$.

4. Вычисления по способу строгого учета погрешностей. При вычислениях нередко возникает необходимость знать границы допущенной погрешности промежуточных вычислений и окончательного результата. Такой способ ведения приближенных вычислений называется способом строгого учета погрешностей. Для этого необходимо знать, как вычисляются границы относительных погрешностей алгебраической суммы, произведения, степени, корня и частного.

Покажем, что относительная погрешность ε произведения не превышает суммы относительных погрешностей ее сомножителей. Пусть дана функция $y = uv$, где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y = \ln u + \ln v;\ \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Так как абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$\left|\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,\ \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

или

$$\varepsilon(uv) = \left|\frac{\mathrm{d}u}{u}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|. \qquad \textbf{(7.13)}$$

Покажем, что относительная погрешность ε частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя. Пусть дана функция $y = u/v$, где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$. Прологарифмировав и взяв дифференциал от функции $y = u/v$, получим

$$\ln y = \ln u - \ln v;\ \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

Так как абсолютная величина разности не превышает суммы абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого, то

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}u}{u}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|$$

или

$$\varepsilon\left(\frac{u}{v}\right) = \left|\frac{\mathrm{d}u}{u}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|. \qquad \textbf{(7.14)}$$

Покажем, что относительная погрешность степени ε равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель степени. Пусть дана функция $y = x^n$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y = n \ln x;\ \frac{\mathrm{d}y}{y} = n\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Относительная погрешность равна

$$\varepsilon(x^n) = n\frac{\mathrm{d}x}{x}. \qquad \textbf{(7.15)}$$

Отметим частные случаи:

1) $n = 2$: $\varepsilon(x^2) = 2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$;

2) $n = 3$: $\varepsilon(x^3) = 3\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Покажем, что относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель степени корня. Пусть дана функция $y = \sqrt[n]{x}$. Прологарифмируем ее и найдем дифференциал:

$$\ln y = \frac{1}{n}\ln x;\ \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}x}{x}. \qquad (7.16)$$

Отметим частные случаи:

1) $n = 2$: $\varepsilon(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

2) $n = 3$: $\varepsilon(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

♦ ПРИМЕР 1

Длина прямоугольника составляет $u = 60$ м, ширина составляет $v = 23$ м. Погрешность при измерении длины не превышает 0,3 м, а при измерении ширины — соответственно 0,2 м. Определить границы погрешности, которая допускается, если площадь прямоугольника принимается равной $60 \cdot 23 = 1380$ м^2, и относительную погрешность.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $|\mathrm{d}u| < 0{,}3$, $|\mathrm{d}v| < 0{,}2$. При наихудших условиях $|\mathrm{d}u| = 0{,}3$, $|\mathrm{d}v| = 0{,}2$. Найдем абсолютную погрешность произведения:

$$\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v = 23 \cdot 0{,}3 + 60 \cdot 0{,}2 = 18{,}9 \approx 19\ (\text{м}^2).$$

Это наибольшая величина абсолютной погрешности, которую можно допустить, принимая площадь равной 1380 м^2. Округляя погрешность в сторону увеличения и принимая ее равной 20 м^2, найдем границы погрешности при вычислении площади. Таким образом, площадь не превосходит $1380 + 20 = 1400$ (м^2) и не может быть менее $1380 - 20 = 1360$ (м^2).

Относительную погрешность вычислим по формуле (7.13):

$$\varepsilon(uv) = \frac{0{,}3}{60} + \frac{0{,}2}{23} = \frac{1}{200} + \frac{2}{230} \approx 0{,}014 = 1{,}4\%.$$

♦ ПРИМЕР 2

Для нахождения плотности тела определены его масса $m_1 = 484$ г и масса вытесненной им воды $m_2 = 62$ г. Абсолютные погрешности $\Delta m_1 = 0{,}5$ г и $\Delta m_2 = 0{,}4$ г. Найти относительную погрешность при вычислении плотности тела ρ.

РЕШЕНИЕ. Так как $\rho = m_1/m_2$, то по (7.14)

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}m_1}{m_1} + \frac{\mathrm{d}m_2}{m_2} = \frac{0{,}5}{484} + \frac{0{,}4}{62} = 0{,}00103 + 0{,}00645 = 0{,}00748 \approx 0{,}7\%.$$

♦ ПРИМЕР 3

Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро равно 12,5 см. Абсолютная погрешность $\Delta x = 0{,}05$ см.

РЕШЕНИЕ. Полагая $\mathrm{d}x = 0{,}05$ см, по формуле (7.15) имеем

$$\varepsilon(x^3) = 3\frac{\mathrm{d}x}{x} = 3\cdot\frac{0{,}05}{12{,}5} = \frac{15}{1250} \approx 0{,}012 = 1{,}2\%.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение абсолютной и относительной погрешностей.
2. Выпишите формулу для вычисления приближенного числового значения функции.
3. Выпишите формулы для приближенных вычислений степени, корня, обратной величины.
4. Выпишите формулы для вычисления границ относительной погрешности алгебраической суммы, произведения, частного, степени и корня.

ГЛАВА 8. Неопределенный интеграл

§ 62. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Одной из главных задач дифференциального исчисления является задача нахождения скорости изменения какой-либо функции, т. е. задача нахождения производной (или дифференциала). На практике часто приходится решать обратную задачу: зная скорость изменения функции, найти эту функцию; эта операция называется ***интегрированием***. Это означает, что необходимо найти функцию $F(x)$ по одному из выражений $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ или $F'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция.

Искомая функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** по отношению к функции $f(x)$.

Первообразной функцией для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)\,\mathrm{d}x$).

Например, первообразной функцией для функции $3x^2$ является x^3, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Но эта первообразная не единственная, а только одна из многих, так как функции $x^3 - 3$, $x^3 + 2$ и вообще $x^3 + C$, где C — произвольная постоянная, тоже являются первообразными для $f(x) = 3x^2$, ибо $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Действительно, если на некотором промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то для этой последней будет первообразной и любая функция вида

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{8.1}$$

где C — постоянная.

Покажем, что этим выражением исчерпывается все множество первообразных, т. е. что любую первообразную для $f(x)$ можно получить из равенства (8.1) при некотором значении C.

Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две функции, являющиеся первообразными для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда на этом промежутке

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

из чего следует, что $\Phi(x) - F(x) = C$ и поэтому $\Phi(x) = F(x) + C$.

Обращаясь к геометрической интерпретации только что доказанного утверждения, можно сказать, что графики всех первообразных для данной функции $f(x)$ представляют собой семейство таких кривых, которые могут быть получены из любой из них путем ее сдвига вдоль оси ординат (рис. 130).

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функция для $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

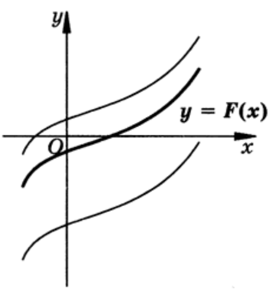


Рис. 130

При этом функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а выражение $f(x)\,\mathrm{d}x$ называется ***подынтегральным выражением***, знак $\int$ называется ***знаком интеграла***.

Согласно определению неопределенного интеграла, можно записать

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{8.2}$$

Операция нахождения первообразной по данной функции называется ***интегрированием****.

* От *integratio* — восстановление (лат.).

♦ ПРИМЕР

Найти: 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{x}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Находим функцию, производная которой равна $\frac{1}{\cos x^2}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos x^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

2) Находим функцию, производная которой равна $\frac{1}{x}$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x \in (0; +\infty)$. Следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Заметим, что $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$, где $-\infty < x < 0$ или $0 < x < +\infty$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла.

I. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{8.3}$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{8.4}$$

Эти свойства непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла.

II. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{8.5}$$

Для доказательства воспользуемся определением неопределенного интеграла:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

но

$$dF(x) = f(x)\,dx,\ f(x) = F'(x),$$

следовательно,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

III. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \neq 0. \qquad (8.6)$$

Докажем формулу (8.6):

$$(af(x)\,dx)' = a(f(x)\,dx)' = af(x),$$

из чего следует формула (8.6).

IV. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx. \qquad (8.7)$$

По формуле (8.3) имеем $(\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))\,dx)' = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$, из чего и следует (8.7).

3. Табличные неопределенные интегралы. Принимая во внимание, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, получим табличные интегралы с помощью таблицы производных.

Приведем таблицу первообразных (постоянная C везде опущена и подразумевается).

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. $\int dx = x.$

II. $\int (a + bx)^n\,dx = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$, $(n \neq -1)$.

III. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$.

IV. $\int \dfrac{dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b}\ln|a+bx|.$

V. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|.$

VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$

VII. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \dfrac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3.$

VIII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$

IX. $\int e^x\,dx = e^x.$

X. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$

XI. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}.$

XII. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

XIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

XIV. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

XV. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

§ 63. Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств.

Отметим, что если операция дифференцирования совершается формально, то далеко не так обстоит дело с интегрированием — например, нет формул для интегрирования произведения или частного функций. Поэтому существуют обширные таблицы интегралов (приведенная выше является весьма неполной) и возникает задача — так преобразовывать вычисляемые интегралы, чтобы их можно было свести к табличным.

Один из приемов, используемых при вычислении интегралов, называется ***методом замены переменных***. Он заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ в интеграл $\int F(u)\,\mathrm{d}u$, который легко вычисляется по какой-либо из табличных формул интегрирования.

♦ ПРИМЕР 1

Вычислить методом замены переменных интеграл: 1) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; 2) $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x$; 3) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2(x^2+1)}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Так как $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$$

2) так как $\mathrm{d}(ax+b) = a\,\mathrm{d}x$, то $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = \int \sin(ax+b)\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{d}(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C;$$

3) так как $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+1)$, то

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1) + C.$$

♦ ПРИМЕР 2

Найти интеграл методом замены переменной:

1) $I_1 = \int (2x^3 + 1)^4 x^2\,\mathrm{d}x$; 2) $I_2 = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^3}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Положим $2x^3 + 1 = u \Rightarrow 6x^2\,dx = \mathrm{d}u \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = (1/6)\,\mathrm{d}u$. Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{6}\int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30}u^5 + C = \frac{1}{30}(2x^3 + 1)^5 + C;$$

2) положим $x^2 + 1 = u \Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = (1/2)\,\mathrm{d}u$. Находим

$$I_2 = \int (x^2 + 1)^{-3} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^{-3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4u^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4(x^2 + 1)^2} + C.$$

♦ ПРИМЕР 3

Методом замены переменной найти интеграл:

1) $I_1 = \int \mathrm{tg}\,kx\,\mathrm{d}x$; 2) $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$; 3) $I_3 = \int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Имеем $I_1 = \int \frac{\sin kx}{\cos kx}\mathrm{d}x$. Положим $\cos kx = u \Rightarrow$ $\Rightarrow -k\sin kx\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \Rightarrow \sin kx\,\mathrm{d}x = -(1/k)\,\mathrm{d}u$. Следовательно,

$$I_1 = -\frac{1}{k}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{k}\ln|u| + C = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C;$$

2) так как $\sin u = 2\sin(u/2)\cos(u/2)$, то $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sin(u/2)\cos(u/2)}$.

Разделив и умножив знаменатель на $\cos(u/2)$, получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}(u/2)\cos^2(u/2)}.$$

Положим $\mathrm{tg}\,(u/2) = z \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(u/2)}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u/2)} = 2\,\mathrm{d}z$.

Таким образом,

$$I_2 = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$$

3) имеем $I_3 = \int \frac{du}{\sin(\pi/2 + u)}$. Положим $\pi/2 + u = z \Rightarrow du = dz$. Поэтому

$$I_3 = \int \frac{dz}{\sin z} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi/2 + u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$$

♦ ПРИМЕР 4

Найти интеграл методом замены переменных:

1) $I_1 = \int 3^{5x^2} x\, dx$; 2) $I_2 = \int e^{-3x^2+1} x\, dx$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

РЕШЕНИЕ. 1) Положим $5x^2 = u \Rightarrow 10x\, dx = du \Rightarrow x\, dx = (1/10)\, du$. Таким образом,

$$I_1 = \frac{1}{10} \int 3^u\, du = \frac{1}{10} \frac{3u}{10 \ln 3} + C = \frac{3^{5x^2}}{10 \ln 3} + C;$$

2) положим $-3x^2 + 1 = u \Rightarrow -6x\, dx = du \Rightarrow x\, dx = -(1/6)\, du$. Таким образом,

$$I_2 = -\frac{1}{6} \int e^u du = -\frac{1}{6} e^u + C = -\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} + C;$$

3) имеем $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1 - (x/a)^2)}}$. Положим $x/a = u \Rightarrow dx = a\, du$.

Таким образом,

$$I_3 = \frac{1}{a} \int \frac{a\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

При помощи подстановок $ax + b = u$ и $\frac{m}{k} x = u$ нетрудно вычислить следующие интегралы (постоянная C везде опущена и подразумевается):

I. $\int e^{(ax+b)}\, dx = \frac{1}{a} e^{(ax+b)}$.

II. $\int g^{(ax+b)}\, dx = \frac{g^{(ax+b)}}{a \ln g}$.

III. $\int \sin(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$, $a \neq 0$.

IV. $\int \cos(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$, $a \neq 0$.

V. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax + b)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax + b)$.

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}(ax+b)$.

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - m^2x}} = \frac{1}{m}\arcsin\frac{m}{k}x,\ m > 0$.

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу — задача неопределенная, так как $f(x)dx$ означает множество первообразных функций вида $y = F(x) + C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C; величина C может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия. Под начальными условиями понимается задание частных значений x и y для первообразной функции $y = F(x) + C$, по которым находится определенное значение C, удовлетворяющее этим начальным условиям.

♦ ПРИМЕР

Найти функцию, производная которой $y' = 2x - 3$, если при $x = 2$ эта функция принимает значение, равное 6.

РЕШЕНИЕ. Имеем $y' = 2x - 3$, или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, т. е. $dy = (2x - 3)\,dx$. Интегрируя обе части последнего равенства, находим значение $\int dy = \int (2x-3)\,dx$; $C_1 + y = x^2 - 3x + C_2$. Полагая $C_2 - C_1 = C$, получим $y = x^2 - 3x + C$. Нашли общее выражение функций, имеющих своей производной $y' = 2x - 3$.

Вычислим C при заданных значениях $x = 2$ и $y = 6$. Подставив в выражение для функции эти значения, получим $6 = 2^2 - 3 \cdot 2 + C$, откуда $C = 8$. Таким образом, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид $y = x^2 - 3x + 8$.

§ 64. Геометрические приложения неопределенного интеграла

Рассмотрим случаи использования неопределенного интеграла при построении графика функции.

♦ ПРИМЕР 1

Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $2x$.

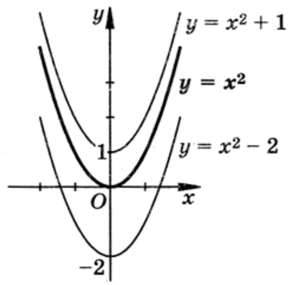


Рис. 131

РЕШЕНИЕ. Согласно условию, угловой коэффициент $k = 2x$. Известно, что $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$; следовательно, $\frac{dy}{dx} = 2x$, т. е. $dy = 2x\,dx$. Интегрируя, получим $\int dy = \int 2x\,dx$; $y = x^2 + C$.

Найдено семейство кривых, для которых угловой коэффициент касательной в любой точке равен $2x$. Эти кривые отличаются друг от друга на постоянную C. При $C = 0$ получим параболу $y = x^2$ с вершиной в начале координат (рис. 131), при $C = 1$ — параболу $y = x^2 + 1$ с вершиной в точке (0; 1), при $C = -2$ — параболу $y = x^2 - 2$ с вершиной в точке (0; −2) и т. д.

♦ ПРИМЕР 2

Составить уравнение линии, если угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен y/x.

РЕШЕНИЕ. Согласно условию, угловой коэффициент $k = y/x$; так как $k = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, из чего, разделив переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln y = \ln x + C$.

Произвольную постоянную полагаем для удобства равной $\ln C$.

Потенцируя, получим $y = Cx$ — уравнение семейств прямых, проходящих через начало координат.

♦ ПРИМЕР 3

Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 1), у которой касательная в любой точке кривой имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания.

РЕШЕНИЕ. Согласно условию, имеем угловой коэффициент $k = \frac{dy}{dx} = y$, т. е. $\frac{dy}{y} = dx$. Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{y} = \int dx$; $\ln y = x + C$. Из начальных условий находим $\ln 1 = 0 + C$, т. е. $C = 0$; следовательно, $y = e^x$.

§ 65. Физические приложения неопределенного интеграла

Рассмотрим несколько ситуаций, когда при решении задач кинематики используются неопределенные интегралы.

♦ ПРИМЕР 1

Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 4$. Найти закон ее движения, если за время $t = 2$ с точка прошла 20 м.

РЕШЕНИЕ. Обозначим путь, пройденный точкой за время t, через S. Так как $v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4$, то $\mathrm{d}S = (3t^2 + 4)\,\mathrm{d}t$. Интегрируя, получим $\int \mathrm{d}S = \int (3t^2 + 4)\,\mathrm{d}t$; $S = t^3 + 4t + C$.

Используя начальные условия, найдем $20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C$, т. е. $C = 4$. Итак, закон движения точки имеет вид $S = t^3 + 4t + 4$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти закон движения свободно падающего тела при постоянном ускорении g, если в начальный момент движения тело находилось в покое.

РЕШЕНИЕ. Известно, что ускорение a прямолинейно движущегося тела есть вторая производная пути S по времени t или производная от скорости v по времени t, т. е. $a = \frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Так как $a = g$, то $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g \Rightarrow \mathrm{d}v = g\,\mathrm{d}t$. Интегрируя, получим

$$\int \mathrm{d}v = \int g\,\mathrm{d}t;\ v = gt + C_1.$$

Используя начальные условия ($v = 0$ при $t = 0$), имеем $0 = g \cdot 0 + C_1$, т. е. $C_1 = 0$. Таким образом, скорость движения тела изменяется по закону $v = gt$.

Найдем теперь закон движения тела. Так как $v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$, то $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = gt$, или $\mathrm{d}S = gt\,\mathrm{d}t$. Интегрируя, получим

$$\int \mathrm{d}S = \int gt\,\mathrm{d}t;\ S = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Используя начальные условия ($S = 0$ при $t = 0$), имеем $0 = g \cdot 0^2/2 + C_2$, $C_2 = 0$. Итак, закон движения падающего тела имеет вид $S = gt^2/2$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Дайте определение подынтегральной функции и подынтегрального выражения.
6. Какой геометрический образ соответствует неопределенному интегралу $\int f(x)\,\mathrm{d}x$?
7. Как проверяется результат интегрирования?
8. При каком условии справедливо равенство $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$?
9. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
10. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала функции $F(x)$?
11. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
12. Укажите ограничения на параметр n для табличного интеграла
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (x > 0).$$
13. Выпишите формулу для интеграла $\int x^n\,\mathrm{d}x$ при $n = -1$.
14. В чем заключается метод замены переменных при отыскании неопределенного интеграла?

ГЛАВА 9. Определенный интеграл

§ 66. Основные свойства и вычисление определенного интеграла

1. Понятие об определенном интеграле. Сформулируем без доказательства теорему ***Ньютона—Лейбница****.

■ ТЕОРЕМА НЬЮТОНА—ЛЕЙБНИЦА

Пусть f — данная функция, F — ее произвольная первообразная. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).} \qquad (9.1)$$

* Английский физик и математик *Исаак Ньютон* [*Newton*] (1643—1727) и немецкий математик и физик *Готфрид Лейбниц* [*Leibniz, Leibnitz*] (1646—1716) являются основоположниками дифференциального и интегрального исчисления.

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется ***определенным интегралом.***

Формула (9.1) носит название формулы Ньютона—Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$.

Алгоритм нахождения определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

I. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.

II. Вычислить значение $F(x)$ при $x = b$ (b называется верхним пределом).

III. Вычислить значение $F(x)$ при $x = a$ (a называется нижним пределом).

IV. Вычислить разность $F(b) - F(a)$.

Приведем примеры:

$$\int\limits_2^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{1}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2};$$

$$\int\limits_0^{\pi/6} \cos x\,dx = \sin x\,\Big|_0^{\pi/6} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2. Основные свойства определенного интеграла. Перечислим основные свойства определенного интеграла:

I. При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла изменяется на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

II. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

III. Определенный интеграл суммы функций равен сумме определенных интегралов этих функций:

$$\int\limits_a^b (f(x) + \varphi(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Например,

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_{-1}^{3}=\left(\frac{3^4}{4}+3\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+(-1)\right)=$$

$$=\left(20\frac{1}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)=24.$$

3. Определенный интеграл как площадь. Пусть непрерывная при всех значениях аргумента положительная функция $y=f(x)$ изображена на рисунке 132.

Кривая $f(x)$, ось Ox, неподвижная ордината $f(a)$ и переменная ордината $f(x)$ ограничивают некоторую криволинейную трапецию.

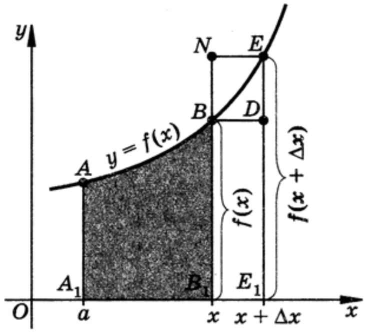


Рис. 132

Обозначим через A, A_1, B и B_1 точки с координатами $(a;\ f(a))$, $(a;\ 0)$, $(x;\ f(x))$, $(x;\ 0)$ соответственно. Тогда площадь фигуры AA_1B_1B будет переменной величиной, зависящей от x; обозначим эту площадь через S. Если аргумент x получит приращение Δx, то площадь S получит приращение ΔS, равное криволинейной площади BB_1E_1E. Здесь координаты точки E: $(x+\Delta x;\ f(x+\Delta x))$, точки E_1 — $((x+\Delta x);\ 0)$. Проведем прямую $BD \parallel Ox$ и прямую $NE \parallel Ox$ до пересечения с продолженной ординатой B_1B.

Имеем

$$S_{B_1BDC_1}<\Delta S<S_{B_1NCC_1}$$

или

$$f(x)\cdot\Delta x<\Delta S<f(x+\Delta x)\cdot\Delta x. \qquad (9.2)$$

Разделив полученное неравенство на Δx $(\Delta x>0)$, получим

$$f(x)<\frac{\Delta S}{\Delta x}<f(x+\Delta x). \qquad (9.3)$$

При $\Delta x\to 0$ значение $f(x+\Delta x)\to f(x)$, следовательно, отношение $\frac{\Delta S}{\Delta x}\to f(x)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$, но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}$ является производной функции S, т. е. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=f(x)$, откуда

$$\mathrm{d}S=f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (9.4)$$

Проинтегрировав обе части предыдущего равенства, получим $\int dS = \int f(x)\,dx$ или

$$S + C_1 = \int f(x)\,dx. \tag{9.5}$$

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$, тогда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_2. \tag{9.6}$$

Из сравнения равенств (9.5) и (9.6) получим:

$$S + C_1 = F(x) + C_2$$

или

$$S = F(x) + C,\ C_2 - C_1 = C. \tag{9.7}$$

Для вычисления C в равенстве (9.7) положим $x = a$, тогда площадь $AA_1B_1B = S = 0$. Следовательно, $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$.

Равенство (9.7) примет вид $S = F(x) - F(a)$, что можно записать в виде определенного интеграла $F(x) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, переменная площадь S примет вид

$$S = \int\limits_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{9.8}$$

Для вычисления постоянной площади, ограниченной площадью криволинейной трапеции AA_1B_1B, положим в формуле (9.8) $x = b$, тогда

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{9.9}$$

Следовательно, площадь фигуры S, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) > 0$), осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{9.10}$$

В этом выражении заключается геометрический смысл определенного интеграла.

◆ ПРИМЕР

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:
1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$; 2) $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$; 3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; 4) $y = x^2$, $y = 2x$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данная фигура изображена на рисунке 133. По (9.10)

$$S = \int_2^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 6{,}5 \text{ (кв. ед.)};$$

2) данная фигура изображена на рисунке 134. По (9.10), где $f(x) = \sqrt{x}$,

$$S = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = $$

$$= 4\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)};$$

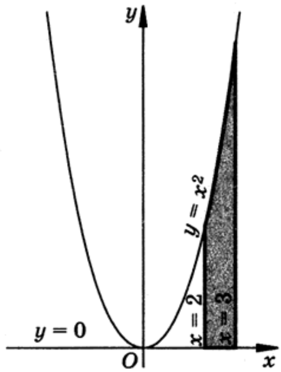


Рис. 133

3) искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью Ox:

$$S = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \text{ (кв. ед.)};$$

4) данная фигура представлена на рисунке 135. Для вычисления точек пересечения заданных линий необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \; x_1 = 0,\; x_2 = 2.$$

Искомая площадь равна разности площадей:

$$S = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

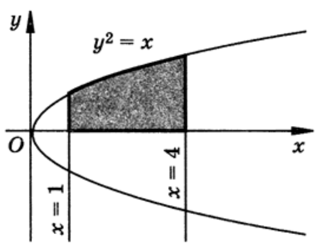


Рис. 134

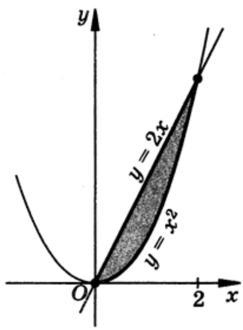


Рис. 135

4. Определенный интеграл как предел суммы. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть функция в этом промежутке является положительной и возрастающей.

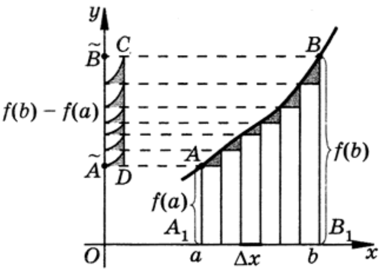


Рис. 136

Выделим площадь фигуры AA_1B_1B (обозначим ее через S), ограниченную кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 136). Здесь точки A, A_1, B, B_1 имеют координаты $(a;\ f(a))$, $(a;\ 0)$, $(b;\ f(b))$, $(b;\ 0)$ соответственно. Эта площадь равна

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (9.11)$$

Разделим отрезок A_1B_1 на n равных частей, каждую из которых обозначим через $\triangle x$. Площадь фигуры состоит из суммы площадей прямоугольников ($S_{\square}$) и суммы площадей криволинейных треугольников ($S_{\triangle}$); $S = S_{\square} + S_{\triangle}$:

$$S - S_{\square} = S_{\triangle}. \qquad (9.12)$$

Абсциссы точек деления обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, а соответствующие им ординаты через $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$.

Сумма площадей всех прямоугольников

$$S = f(a)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \ldots + f(x_{n-1})\triangle x$$

или

$$S = \sum_a^b f(x)\triangle x. \qquad (9.13)$$

Если число делений n отрезка A_1B_1 неограниченно увеличивать, то $\triangle x \to 0$, и величины $S_{\square}$ и $S_{\triangle}$ станут переменными. При этом условии $S_{\triangle}$ будет величиной бесконечно малой. Расположим криволинейные треугольники в прямоугольнике $\tilde{A}\tilde{B}CD$: основанием этого прямоугольника является отрезок $\triangle x$, высотой — отрезок $(f(b) - f(a))$, а площадью — произведение $|f(b) - f(a)|\triangle x$. При этом

$$S_{\triangle} < |f(b) - f(a)|\triangle x. \qquad (9.14)$$

При $\triangle x \to 0$ произведение постоянной $|f(b) - f(a)|$ на бесконечно малую $\triangle x$ есть величина бесконечно малая, тогда и $S_{\triangle}$ — бесконечно малая.

Таким образом, левая часть формулы (9.12) — величина бесконечно малая, тогда по определению предела равенство (9.13) принимает вид

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S_{\square} = \sum_{a}^{b} f(x)\, \Delta x. \qquad (9.15)$$

Сравнивая формулы (9.11) и (9.15), получаем

$$\int_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\, \Delta x. \qquad (9.16)$$

Правая часть равенства (9.16) называется ***пределом интегральной суммы***.

> Определенный интеграл с конечными пределами равен пределу интегральной суммы, число слагаемых которой неограниченно растет, и каждое слагаемое стремится к нулю.

Отметим, что вывод не зависит от вида функции (она может быть убывающей, возрастающей, возрастающей на одних участках и убывающей на других).

Итак, интегрирование есть процесс суммирования, т. е. нахождение целого путем суммирования его частей. Отметим, что символ $\int$ есть удлиненная буква S.

5. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной. При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x$ преобразуется с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ или $x = \psi(u)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые находятся из исходной подстановки.

♦ ПРИМЕР

Вычислить определенный интеграл: 1) $I_1 = \int_{2}^{3} (2x-1)^3\, \mathrm{d}x$; 2) $I_2 = \int_{0}^{1} (2x^3+1)^4 x^2\, \mathrm{d}x$; 3) $I_3 = \int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}}$.

РЕШЕНИЕ. 1) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x - 1 = u$. Дифференцируя, получаем $2\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, откуда $\mathrm{d}x = (1/2)\, \mathrm{d}u$. Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение $2x - 1 = u$ значения $x = 2$ и $x = 3$, соответственно получим $u_{x=2} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $u_{x=3} = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Следовательно, $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_3^5 u^3\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{u^4}{4}\Big|_3^5 = \dfrac{1}{8}(5^4 - 3^4) = 68$;

2) положим $2x^3 + 1 = u$; тогда $6x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/6$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_{x=0} = 2 \cdot 0^3 + 1 = 1$, $u_{x=1} = 2 \cdot 1^3 + 1 = 3$. Таким образом,

$$I_2 = \frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^5}{5}\Big|_1^3 = \frac{1}{30}(3^5 - 1^5) = 8\frac{1}{15};$$

3) преобразуем подкоренное выражение: $4 - 9x^2 = 4(1 - (3x/2)^2)$. Положим $3x/2 = u$, откуда $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u/3$. Найдем новые пределы интегрирования: $u_{\sqrt{2}/3} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $u_{\sqrt{3}/3} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$I_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin u\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36}.$$

§ 67. Физические приложения определенного интеграла

1. Вычисление пути, пройденного точкой. Путь S, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$, $v \geqslant 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (9.17)$$

♦ ПРИМЕР 1

Скорость движения точки изменяется по закону $v = (3t^2 + 2t + 1)$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

РЕШЕНИЕ. По формуле (9.17) имеем

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)\,\mathrm{d}t = (t^3 + t^2 + t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110\ (\text{м}).$$

♦ ПРИМЕР 2

Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за четвертую секунду.

РЕШЕНИЕ. Здесь пределами интегрирования являются $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$S = \int_3^4 (9t^2 - 8t)\,\mathrm{d}t = (3t^2 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83\ (\text{м}).$$

♦ ПРИМЕР 3

Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (6t^2 + 2t)$ (м/с), второе — со скоростью $v_2 = (4t + 5)$ (м/с). На каком расстоянии S друг от друга они окажутся через 5 с?

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 275\ (\text{м});$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)\,\mathrm{d}t = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75\ (\text{м}).$$

Таким образом, $S = S_1 - S_2 = 200$ (м).

♦ ПРИМЕР 4

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39{,}2 - 9{,}8t)$ (м/с). Найти наибольшую высоту $H_{\max}$ подъема тела.

РЕШЕНИЕ. Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t_0, когда $v = 0$, т. е. $39{,}2 - 9{,}8t_0 = 0$, следовательно, $t_0 = 4$ (с). Находим:

$$H_{\max} = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)\,\mathrm{d}t = (39{,}2t - 4{,}9t^2)\Big|_0^4 = 78{,}4\ (\text{м}).$$

2. Вычисление работы. Работу A, произведенную переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$ до $x = b$, находим по формуле

$$A = \int f(x)\,dx. \tag{9.18}$$

При решении задач на вычисление работы силы, связанных с растяжением—сжатием пружин, основываются на соотношении

$$F = kx, \tag{9.19}$$

где F — сила; x — абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F, k — коэффициент пропорциональности.

♦ ПРИМЕР 1

Укорочение x винтовой пружины при сжатии пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу A силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

РЕШЕНИЕ. По формуле (9.19) $F = k \cdot 0{,}01$, следовательно, $k = 1000$ (Н/м), поэтому в данной задаче $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Работу найдем по (9.18), полагая $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x\,dx = 500x^2\Big|_0^{0,04} = 0{,}8\ (\text{Дж}).$$

♦ ПРИМЕР 2

Для растяжения пружины на $l_1 = 0{,}04$ м необходимо совершить работу $A_1 = 20$ Дж. На какую длину l_2 можно растянуть пружину, совершив работу, равную 80 Дж?

РЕШЕНИЕ. По формуле (9.18) работа $A_1 = \int_0^{l_1} kl\,dl$, т. е.

$$20 = \int_0^{0,04} kl\,dl = k\frac{l_2}{2}\Big|_0^{0,04} = 0{,}0008k,$$

откуда $k = 20/0{,}0008 = 25\,000$ (Н/м). Тогда

$$80 = \int_0^{l_2} 25\,000\,l\,dl = 25\,000\frac{l^2}{2}\Big|_0^{l_2} = 12\,500 l_2^2,$$

откуда $l_2^2 = 80/12\,500$; $l_2 = 0{,}08$ (м).

♦ ПРИМЕР 3

Цилиндрическая цистерна с радиусом основания $r = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м заполнена водой. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Определить работу A, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

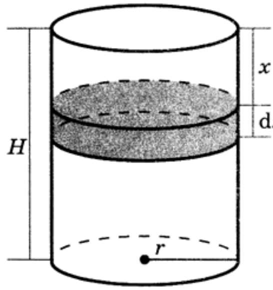


Рис. 137

РЕШЕНИЕ. Вес воды, заполняющей цистерну, равен

$$P = mg,$$

где $m = \rho V$ — масса воды, V — объем цистерны, g — ускорение свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2). Таким образом,

$$P = \rho V g.$$

Чтобы поднять слой воды $\mathrm{d}x$ на высоту x, необходимо совершить работу

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}Px,$$

где $\mathrm{d}P = \rho g\,\mathrm{d}V$ — вес выделенного слоя, $\mathrm{d}V$ — его объем. Так как $\mathrm{d}V = \pi r^2\,\mathrm{d}x$, получим

$$\mathrm{d}A = \rho g \pi r^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Для того чтобы получить выражение для работы A, следует взять определенный интеграл в пределах от 0 до H:

$$A = \int_0^H \rho g \pi r^2 x\,\mathrm{d}x = \rho g \pi r^2 \int_0^H x\,\mathrm{d}x = \rho g \pi r^2 \frac{H}{2} =$$

$$= 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{4}{2} \approx 15\,400 \text{ (Дж)}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выпишите формулу Ньютона — Лейбница и объясните ее смысл.
2. Приведите основные свойства определенного интеграла.
3. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
4. В чем заключается соответствие между пределом интегральной суммы и определенным интегралом?

§ 68. Понятие о дифференциальном уравнении

1. Общие понятия о дифференциальных уравнениях. ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается следующим образом:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y', y'') = 0,\ F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) ***дифференциального уравнения*** называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) ***дифференциального уравнения*** называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти общее решение уравнения $x(1 + y^2)\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y$.

РЕШЕНИЕ. Разделив переменные, получим

$$x\,\mathrm{d}x = \frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2}.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int x\,\mathrm{d}x = \int \frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2}\ ;\ \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований в качестве такой постоянной приняли $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = \ln C(1 + y^2).$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

♦ ПРИМЕР 2

Найти частное решение уравнения $S\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}S = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $S = 4$ при $t = \pi/3$.

РЕШЕНИЕ. Разделив переменные, получим

$$\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}S}{S} = 0.$$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}S}{S} = \ln C; -\ln\cos t + \ln S = \ln C$$

или $\ln S = \ln C + \ln\cos t$;

$$S = C\cos t.$$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \pi/3$ и $S = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos(\pi/3)$, или $4 = C/2$, откуда $C = 8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $S = 8\cos t$.

♦ ПРИМЕР 3

Найти закон движения тела по оси Ox, если оно начало двигаться из точки $M(4;\ 0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

РЕШЕНИЕ. При прямолинейном движении скорость есть производная от пути по времени. Обозначив путь через x, имеем $v = \frac{dx}{dt}$; тогда

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2 \Rightarrow dx = (2t + 3t^2)\,dt.$$

Проинтегрировав, получим $x = t^2 + t^3 + C$. Используя начальные условия, найдем C. Так как $x = 4$ при $t = 0$, то, подставив эти значения в общее решение, находим $C = 4$. Итак, закон движения тела имеет вид $x = t^3 + t^2 + 4$.

♦ ПРИМЕР 4

Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;\ -3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = 4x - 3$.

РЕШЕНИЕ. Согласно условию, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3 \Rightarrow dy = (4x - 3)\,dx.$$

Проинтегрировав, получим $y = 2x^2 - 3x + C$. Используя начальные условия ($x = 2$, $y = -3$), находим $C = -5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $y = 2x^2 - 3x - 5$.

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\cdot y = \varphi(x) = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции переменной x, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z — новые функции аргумента x.

♦ ПРИМЕР 1

Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение является линейным: здесь $f(x) = -\frac{2y}{x+1}$, $\varphi(x) = -(x-1)^3$. Положим $y = uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, получим

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{x+1} = (x+1)^3$$

или

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0$. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{du}{u} - \frac{2dx}{x+1} = 0,\ \int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x+1};$$
$$\ln u = 2\ln(x+1) \Rightarrow u = (x+1)^2,$$

произвольную постоянную принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений.

Подставим теперь выражение для u в уравнение (*), тогда получим

$$(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3$$

или

$$\frac{dz}{dx} = x+1.$$

Отсюда находим

$$\int dz = \int (x+1)\,dx;\ z = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Зная u и z, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uz = (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right);\ y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

♦ ПРИМЕР 2

Найти частное решение уравнения $\cos x\,dy + y\sin x\,dx = dx$, если $y = 1$ при $x = 0$.

РЕШЕНИЕ. Разделив все члены данного уравнения на $\cos x$, придем к уравнению

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \qquad (**)$$

которое является линейным. Положим $y = uz$; тогда $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$. Подставив выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в (**), получим:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + uz\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + u\,\mathrm{tg}\,x\right) = \frac{1}{\cos x}.$$

Для отыскания u получаем уравнение

$$\frac{du}{dx} + u\,\mathrm{tg}\,x = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \mathrm{tg}\,x\,dx = 0,$$

из которого следует

$$\int\frac{du}{u} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx;\ \ln u = \ln\cos x \Rightarrow u = \cos x.$$

Подставляя выражение для u в уравнение (**), приходим к

$$\cos x\,\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е.

$$z = \mathrm{tg}\,x + C.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = uz = \cos x\,(\mathrm{tg}\,x + C) = \sin x + C\cos x.$$

Используя начальные условия, получаем $1 = \sin 0 + C\cos 0$, откуда $C = 1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \sin x + \cos x$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какие решения дифференциального уравнения называются общим и частным?
4. Как решаются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?
5. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?

ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 10. Прямая на плоскости и ее уравнения

§ 69. Векторы на плоскости. Основные понятия и определения

1. Понятие вектора. Преобразование фигуры F на плоскости, при котором ее произвольная точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку с координатами $(x + a; y + b)$, где a и b — постоянные, называется ***параллельным переносом.*** Параллельный перенос задается формулами

$$x_1 = x + a,\ y_1 = y + b, \tag{10.1}$$

где $(x_1; y_1)$ — координаты точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при параллельном переносе.

Отрезок называется ***направленным***, если один из его концов считается началом отрезка, а другой — его концом. ***Вектором*** называется направленный отрезок. Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ либо $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$*. Точка A называется ***началом***, а точка B — ***концом*** вектора $\overrightarrow{AB}$.

Расстояние $|\overrightarrow{AB}|$ называется длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AA}$, концы которого совпадают, называется ***нулевым вектором.*** Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления для нулевого вектора не вводится.

Каждый вектор, отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением, длиной и точкой приложения.

---

* Существует также практика обозначения векторов путем набора их наименования жирным шрифтом, например **AB** либо ***a***, ***b***, а также с черточкой вместо стрелки наверху: $\overline{AB}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо в противоположные стороны. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***сонаправленными*** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), во втором — ***противоположно направленными*** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Два вектора называются ***равными***, если они совмещаются параллельным переносом, т. е. если существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Другими словами, равные векторы сонаправлены и равны по модулю, т. е. если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, и, наоборот, если векторы сонаправлены и равны по модулю, то они равны, т. е. если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Любой вектор равен самому себе: $\vec{a} = \vec{a}$. Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Из любой точки плоскости можно отложить единственный вектор, равный данному вектору. Построение вектора MN, равного вектору $\vec{a}$, называется ***откладыванием*** вектора $\vec{a}$ от точки M (рис. 138).

Чтобы построить вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, проведем из точки M луч, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, и отложим на нем отрезок MN такой, что $MN = |\vec{a}|$. Тогда $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

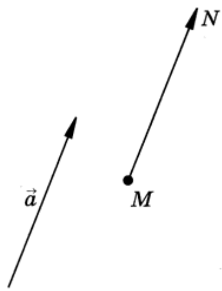


Рис. 138

♦ ПРИМЕР

Параллельный перенос переводит точку $A(2; 3)$ в точку $\tilde{A}(-3; 2)$. В какую точку $\tilde{B}(x_1; y_1)$ он переведет точку $B(3; -1)$?

РЕШЕНИЕ. Используя формулу (10.1), находим значения a и b, соответствующие параллельному переносу точки A в точку $\tilde{A}$: $-3 = 2 + a$, $2 = 3 + b$, т. е. $a = -5$, $b = -1$. Далее, $x_1 = 3 - 5 = -2$, $y_1 = -1 - 1 = -2$, т. е. $(-2; -2)$ — координаты точки $\tilde{B}$ (рис. 139).

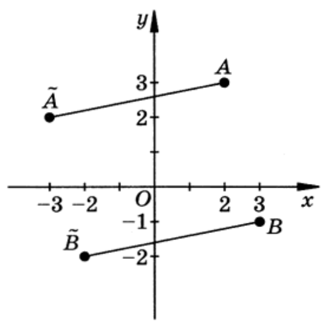


Рис. 139

2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку и отложить от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и затем от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является искомой суммой $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 140). Вектор $\vec{c}$ называют ***замыкающим*** вектором, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ***составляющими*** векторами. Этот способ построения называется ***правилом треугольника***. Правило треугольника можно сформулировать и так: если A, B и C — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить и иначе. Откладывая от произвольной точки O (рис. 141) векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, построим параллелограмм $OACB$. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}$ (где $|\overrightarrow{OC}|$ — диагональ параллелограмма) является искомой суммой: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Этот способ построения называется ***правилом параллелограмма***.

Чтобы построить сумму n данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, нужно от произвольной точки O отложить вектор $\vec{a}_1$, затем от конца вектора $\vec{a}_1$ отложить вектор $\vec{a}_2$ и т. д. (рис. 142). В заключение от конца вектора $\vec{a}_{n-1}$ необходимо отложить вектор $\vec{a}_n$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}_1$, а конец — с концом вектора $\vec{a}_n$, является искомой суммой $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$.

Два вектора называются ***противоположными***, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$,

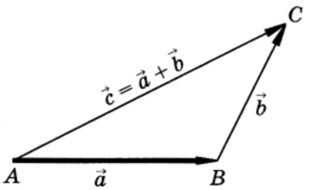


Рис. 140

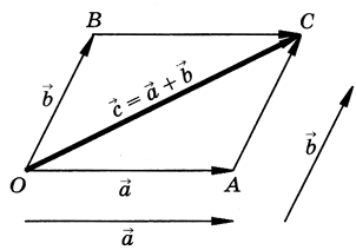


Рис. 141

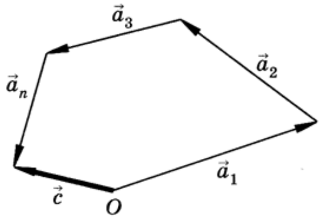


Рис. 142

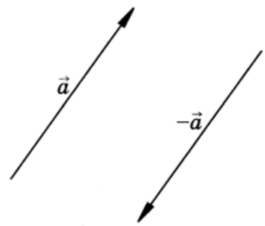


Рис. 143

обозначают со знаком *минус*: $-\vec{a}$. Таким образом, $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$. Ненулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления (рис. 143).

Вектор $\vec{c}$ называется ***разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, достаточно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, т. е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис. 144).

Другой способ построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ состоит в следующем. Откладывая от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$, получим $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 145).

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, если $m > 0$, и противоположное направление, если $m < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа m. Произведение вектора $\vec{a}$ на число m обозначается $m\vec{a}$. При любых m и $\vec{a}$ векторы $m\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и

$$|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|.$$

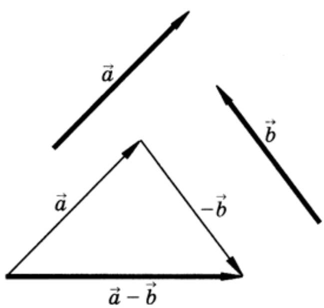


Рис. 144

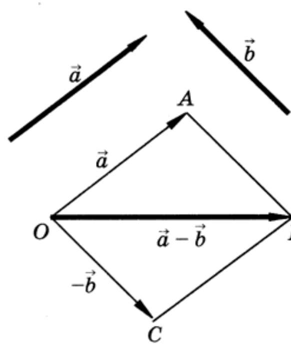


Рис. 145

3. Угол между двумя векторами и между вектором и осью. Углом между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между направлениями этих векторов φ, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$. Угол $\varphi = 0$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, и $\varphi = 180°$, если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется ***осью***.

Вектор $\vec{e}$, имеющий длину $|\vec{e}| = 1$ и направление, совпадающее с направлением оси, называется ***единичным вектором*** (***ортом***) этой оси.

Если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{e}$ — вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, то $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Углом ψ между ненулевым вектором $\vec{a} \neq 0$ и осью l называется угол между направлениями оси и вектора; $0 \leqslant \psi \leqslant 180°$.

Проекцией вектора на ось называется отрезок на оси, начало и конец которого являются проекциями начала и конца вектора. Длина этого отрезка считается положительной, если направления вектора и оси совпадают, и отрицательной, если их направления противоположны (рис. 146). Иначе говоря, если угол α между положительным направлением оси и направлением вектора составляет меньше $90°$, то проекция является положительным числом, и отрицательным, если этот угол является тупым $(90° < \beta < 180°)$.

Отметим, что если угол между осью и вектором равен $90°$ (вектор перпендикулярен оси), проекция вектора равна нулю.

Проекция вектора $\vec{a} \neq 0$ на ось l равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла φ между осью и вектором (рис. 147):

$$a_l = |\vec{a}| \cos \varphi. \qquad (10.2)$$

Проекция суммы векторов равна сумме его проекций.

4. Прямоугольная система координат. Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенных от некоторого начала — точки O (рис. 148). Такую пару

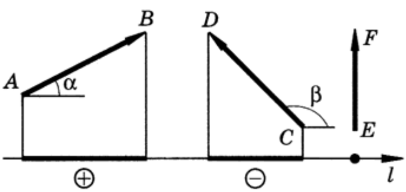


Рис. 146

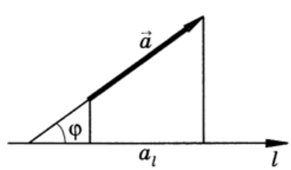


Рис. 147

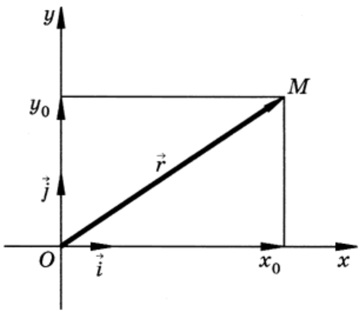


Рис. 148

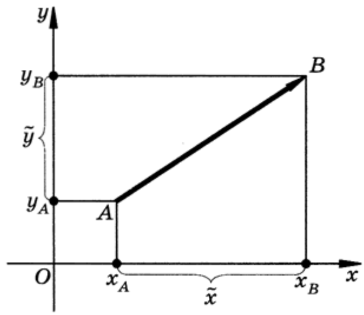


Рис. 149

векторов называют ***прямоугольным базисом*** на плоскости. Совокупность начала O и прямоугольного базиса $(\vec{i},\ \vec{j})$ называют ***прямоугольной*** или декартовой* ***системой координат*** на плоскости. Точку O называют началом координат, а векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатными векторами.

Вектор, направленный из начала координат в произвольную точку M плоскости xOy, называется радиусом-вектором точки M и обозначается $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси называются координатами вектора. Координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ кратко обозначаются следующим образом: $\vec{r} = (x_0;\ y_0)$.

Координаты радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ являются одновременно координатами точки M, т. е. конца радиуса-вектора $\vec{r}$.

Если начало вектора $\overrightarrow{AB}$ не совпадает с началом координат, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и координаты его конца различны, это показано на рисунке 149. В таком случае проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат соответственно равны:

$$\tilde{x} = x_B - x_A,\ \tilde{y} = y_B - y_A. \qquad (10.3)$$

Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i},\ \vec{j})$ имеет вид

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \qquad (10.4)$$

где $\vec{i}$ — единичный вектор на оси Ox, $\vec{j}$ — единичный вектор на оси Oy (рис. 148).

---

* О *Декарте* см. § 2.

Числа x_0 и y_0 называются ***координатами вектора*** $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

Векторы $x_0\vec{i}$ и $y_0\vec{j}$ называются ***составляющими*** (или компонентами) вектора $\vec{a}$.

Если начало вектора $\vec{a}$ находится в точке $A(x_A;\ y_A)$, а конец — в точке $B(x_B;\ y_B)$, то разложение вектора $\vec{a}$ записывается в виде

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}. \tag{10.5}$$

Если в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ заданы векторы $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$, то:

I. Координаты суммы двух (или более) векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2).$$

II. Координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов, т. е.

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2).$$

III. Координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число, т. е.

$$m\vec{a} = (mx_1;\ my_1).$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ имеет вид

$$x_1 = mx_2;\ y_1 = my_2, \tag{10.6}$$

т. е. если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Если $m > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, если $m < 0$, то направление векторов противоположно.

♦ ПРИМЕР 1

Найти проекцию a_x вектора $\vec{a}$ на ось x, образующую с вектором угол $\alpha = 60°$, если $|\vec{a}| = 6$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.2)

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha = 6 \cdot \cos 60° = 6 \cdot (1/2) = 3.$$

♦ ПРИМЕР 2

Выразить через единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ вектор $\overrightarrow{AB}$, если координаты начала и конца вектора составляют соответственно $(-2;\ -1)$, $(4;\ -3)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.5)

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-2))\vec{i} + (-3 - (-1))\vec{j} = 6\vec{i} - 2\vec{j}.$$

5. Длина вектора. Углы, образуемые вектором с осями координат. Длина вектора $\vec{a} = (x;\ y)$ определяется следующим образом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{10.7}$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$ находится по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{10.8}$$

С помощью формулы (10.8) вычисляется также расстояние между двумя точками на плоскости (соответствующее доказательство будет дано в § 70, п. 1).

Углы, образуемые вектором $\overrightarrow{AB}$ с осями координат Ox и Oy, определяются соотношениями:

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}. \tag{10.9}$$

♦ ПРИМЕР 1

Определить длину вектора $|\overrightarrow{AB}|$, если $A(1;\ 1)$, $B(4;\ -3)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.8)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-3 - 1)^2} = 5.$$

♦ ПРИМЕР 2

Найти единичный вектор того же направления, что и вектор $\vec{a} = (3;\ 4)$.

РЕШЕНИЕ. Длина вектора $\vec{a}$ составляет $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Единичный вектор $\vec{e}$ того же направления, что и вектор $\vec{a}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\vec{a}.$$

Каждая проекция вектора $\vec{e}$ в пять раз меньше соответствующей проекции вектора $\vec{a}$, поэтому $\vec{e}\left(\frac{3}{5}i;\ \frac{4}{5}\vec{j}\right)$.

♦ ПРИМЕР 3

Найти косинусы углов, образуемых заданным вектором AB с осями координат, начало и конец вектора: $A(2; -3)$, $B(1; 4)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.9) имеем:

$$\cos\alpha = \frac{1-2}{\sqrt{(1-2)^2+(4+3)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{50}} = -0{,}1\sqrt{2};$$

$$\cos\beta = \frac{4+3}{\sqrt{(1-2)^2+(4+3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{50}} = 0{,}7\sqrt{2}.$$

6. Скалярное произведение двух векторов. ***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, если обозначить через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{10.10}$$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого вектора на направление первого:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot b_a = |\vec{b}|\cdot a_b. \tag{10.11}$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2. \tag{10.12}$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}). \tag{10.13}$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заключается в соотношении:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|, \tag{10.14}$$

при этом знак *плюс* соответствует случаю $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а знак *минус* — случаю $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ выражается через их координаты по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{10.15}$$

Угол φ между двумя векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (10.16)$$

Из формулы (10.16) следует, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \qquad (10.17)$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(-3; 2)$ и $\vec{b}(4; 3)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.15)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 3 = -6.$$

♦ ПРИМЕР 2

Вычислить угол γ между векторами $\vec{a}(-4; 3)$ и $\vec{b}(3; -4)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.16) находим:

$$\cos\gamma = \frac{-4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -0{,}96,$$

из таблиц находим, что $\gamma = 163°,7$.

♦ ПРИМЕР 3

Проверить, перпендикулярны ли векторы $\vec{a}(-3; 2)$ и $\vec{b}(4; 6)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (10.17) находим

$$(-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0,$$

т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение вектора.
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются равными?
4. Как производится сложение и вычитание векторов?
5. Дайте определение угла между векторами.
6. Дайте определение угла между вектором и осью.
7. Какой вектор называется единичным?
8. Как находится проекция вектора на ось?
9. Как записываются координаты радиуса-вектора?
10. Как записывается формула разложения радиуса-вектора по координатным осям?

11. Перечислите правила действий над векторами, заданными своими координатами.
12. Сформулируйте условие коллинеарности двух векторов.
13. Как вычисляется длина вектора?
14. Как вычисляются углы, образуемые вектором с осями координат?
15. Дайте определение скалярного произведения двух векторов.
16. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
17. Как выражается скалярное произведение двух векторов через их координаты?
18. По какой формуле вычисляется угол между двумя векторами?

§ 70. Метод координат

Как было уже установлено, в декартовой системе координат на плоскости каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел x и y (ее координат), которые определяют положение точки на плоскости. Наоборот, каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости.

Метод координат широко применяется в различных областях математики. Рассмотрим две задачи, имеющие приложения во многих разделах аналитической геометрии.

1. Расстояние между двумя точками. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (рис. 150). Требуется найти расстояние между ними.

Построим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB, а катетами — отрезки AC и BC, параллельные осям Ox и Oy и равные соответствующим проекциям отрезка AB на эти оси. В $\triangle ABC$ катет $AC = x_2 - x_1$, а катет $BC = y_2 - y_1$. Обозначим отрезок AB через d. Тогда по теореме Пифагора

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{10.18}$$

2. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ (рис. 151). Найдем точку $C(x_C; y_C)$, делящую отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \lambda$.

Проведем через точки A, B и C прямые, параллельные осям координат, получим при этом следующие подобные треугольники: $\triangle ACD \sim \triangle CBE$.

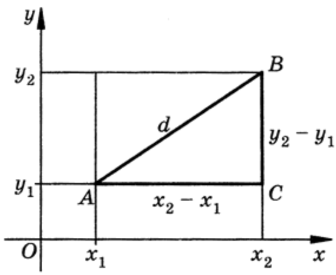


Рис. 150

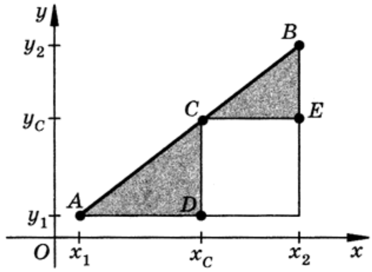


Рис. 151

Поэтому

$$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB};$$

согласно условию,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \lambda.$$

Отсюда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda.$$

Решив эти уравнения относительно x и y, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (10.19)$$

Формулы (10.19) справедливы для любых двух точек A и B плоскости.

При делении отрезка пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1$, формулы (10.19) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (10.20)$$

♦ ПРИМЕР

Точка C делит отрезок AB в отношении (3 : 5). Концами отрезка служат точки $A(2; 3)$ и $B(10; 11)$. Найти точку C.

РЕШЕНИЕ. По формулам (10.19), находим

$$x_C = \frac{2 + 3/5 \cdot 10}{1 + 3/5} = 5; \quad y_C = \frac{3 + 3/5 \cdot 11}{1 + 3/5} = 6.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Как определяется положение точки на плоскости?
2. Как вычисляется расстояние между двумя точками?
3. Как определяется середина отрезка между двумя данными точками?
4. Как находится точка, делящая отрезок в данном отношении?

§ 71. Уравнения прямых

1. Уравнения прямых, параллельных осям координат. Уравнение осей координат. Выберем точку $(a;\ 0)$ и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy (рис. 152). Уравнением этой прямой является $x = a$. При $a = 0$ прямая сольется с осью Oy. Таким образом получим ***уравнение оси Oy*: $x = 0$.**

Если через точку $(0;\ b)$ проведем прямую, параллельную оси Ox, то уравнением этой прямой является $y = b$. При $b = 0$ прямая сольется с осью Ox; таким образом, **уравнение оси Ox: $y = 0$.** Итак,

$$\begin{aligned} &x = a \text{ — уравнение прямой, параллельной оси } Oy;\\ &x = 0 \text{ — уравнение оси } Oy;\\ &y = b \text{ — уравнение прямой, параллельной оси } Ox;\\ &y = 0 \text{ — уравнение оси } Ox. \end{aligned} \tag{10.21}$$

2. Уравнение прямой, проходящей через начало координат. Через произвольную точку $M(x;\ y)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ и начало координат проведем прямую, которая образует с осью Ox угол α (рис. 153).

Опустив из точки M на ось Ox перпендикуляр MM_1, получим треугольник OMM_1, из которого следует, что $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$; положив $\operatorname{tg} \alpha = k$, получим уравнение

$$y = kx. \tag{10.22}$$

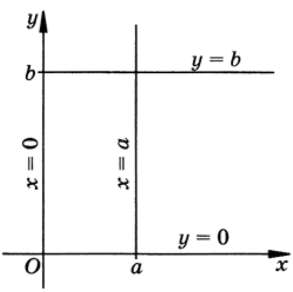


Рис. 152

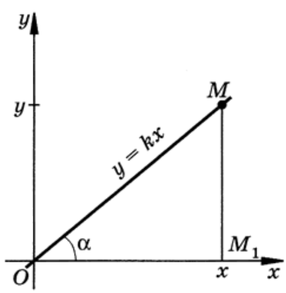


Рис. 153

Координаты любой точки прямой OM удовлетворяют полученному уравнению, формула (10.22) является уравнением прямой, проходящей через начало координат; здесь k — угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox. Если α — острый угол, то $k > 0$, если α — тупой угол, то $k < 0$. При $\alpha = 90°$ функция тангенса не имеет числового значения, т. е. отсутствует возможность записи уравнения прямой с помощью углового коэффициента.

♦ ПРИМЕР

Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат под углом 135°.

РЕШЕНИЕ. Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} 135° = -1$. Уравнение прямой: $y = -x$.

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой. Пусть прямая, не параллельная оси Oy, пересекает ось Oy в точке $A(0;\ a)$, а ось Ox пересекает под углом α (рис. 154). Выберем на прямой произвольную точку $B(x;\ y)$. Построим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ такой, что катеты AC и BC параллельны осям Ox и Oy соответственно. В этом треугольнике катет $BC = y - a$, $\angle BAC = \alpha$. Имеем $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y-a}{x}$, или $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + a$.

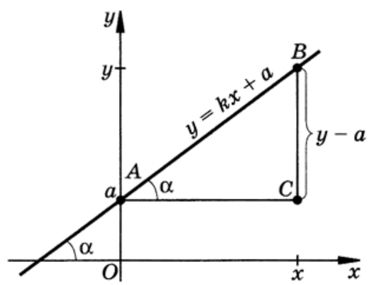


Рис. 154

Обозначив $\operatorname{tg} \alpha = k$, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой a:

$$y = kx + a. \tag{10.23}$$

При $a = 0$ получаем уравнение прямой, проходящей через начало координат: $y = kx$; при $k = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox: $y = a$; при $k = 0$ и $a = 0$ — уравнение оси Ox: $y = 0$.

♦ ПРИМЕР 1

Прямая наклонена к оси Ox под углом 60° и имеет начальную ординату $a = -2$. Составить уравнение прямой.

РЕШЕНИЕ. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. По формуле (10.23) уравнение прямой: $y = \sqrt{3}\,x - 2$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -4)$ и наклоненной к оси Ox под углом 45°.

РЕШЕНИЕ. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Координаты точки A должны удовлетворять уравнению прямой, поэтому $-4 = 1 \cdot 2 + a$, где a — ордината точки пересечения прямой с осью Ox, откуда $a = -4 - 2 = -6$. Получим уравнение прямой: $y = x - 6$.

4. Общее уравнение прямой. Всякая прямая линия определяется уравнением первой степени. В этом можно убедиться, рассматривая уравнения (10.21—10.23).

Эти уравнения легко получить из уравнения

$$Ax + By + C = 0 \qquad (10.24)$$

при различных значениях коэффициентов A, B и C.

I. $\underline{B = 0, A \neq 0, C \neq 0} \Rightarrow \underline{Ax + C = 0}$. Положив $-\dfrac{C}{A} = a$, получим $x = a$, следовательно, уравнение $Ax + C = 0$ является уравнением прямой, параллельной оси Oy.

II. $\underline{A = 0, B \neq 0, C \neq 0} \Rightarrow \underline{By + C = 0}$. Положив $-\dfrac{C}{A} = b$, получим $y = b$. Следовательно, уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox.

III. $\underline{B = 0, C = 0, A \neq 0} \Rightarrow \underline{Ax = 0}$. Уравнение $Ax = 0$ является уравнением оси ординат $x = 0$.

IV. $\underline{A = 0, C = 0, B \neq 0} \Rightarrow \underline{By = 0}$. Уравнение $By = 0$ является уравнением оси абсцисс $y = 0$.

V. $\underline{C = 0, A \neq 0, B \neq 0} \Rightarrow \underline{Ax + By = 0}$. Положив $-\dfrac{A}{B} = k$, получим уравнение $y = kx$, определяющее прямую, проходящую через начало координат.

VI. $\underline{A} \neq \underline{0, B} \neq \underline{0, C} \neq \underline{0}$. Уравнение (10.24) можно преобразовать к виду $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Положив $-\dfrac{A}{B} = k$; $-\dfrac{C}{B} = a$, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой (10.23).

Следовательно, уравнение (10.24) включает в себя все рассмотренные уравнения прямых, поэтому его и называют ***общим уравнением прямой.***

Уравнение первой степени (10.24) при любых значениях A, B и C (исключая $A = B = 0$) определяет прямую линию.

♦ ПРИМЕР 1

Построить прямую $2x - 3y + 6 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Построим эту прямую по двум точкам ее пересечения с осями координат. Положив в исходном уравнении последовательно $x = 0$, $y = 0$, получим точки $(0; 2)$ и $(-3; 0)$. Соединив эти точки (рис. 155), получим прямую $2x - 3y + 6 = 0$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти угловой коэффициент k и начальную ординату a прямой $3x + 2y - 6 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем это уравнение к виду $y = kx + a$: $y = -\dfrac{3}{2}x + 3$.

Поэтому $k = -\dfrac{3}{2}$, $a = 3$.

5. Уравнение прямой в отрезках на осях. В примере, проиллюстрированном рисунком 155, показано, как построить прямую по точкам на осях координат, т. е. по отрезкам, которые она отсекает на координатных осях.

Прямая $Ax + By + C = 0$ отсекает на осях Ox и Oy отрезки в том случае, если все ее коэффициенты не равны нулю. Преобразуем уравнение $Ax + By + C = 0$ в уравнение прямой в ***отрезках на осях***:

$$Ax + By = -C \Rightarrow \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Положив $a = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{B}{C}$, получим уравнение в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{10.25}$$

здесь a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy (рис. 156).

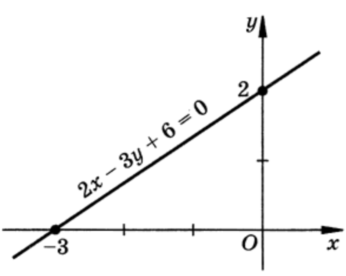


Рис. 155

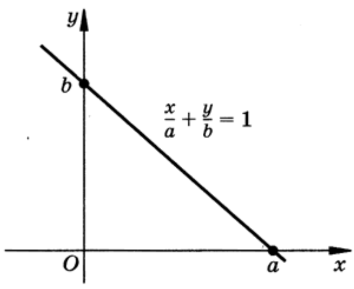


Рис. 156

Прямая (10.25) пересекает ось Ox в точке a и ось Oy — в точке b; в этом легко убедиться, подставив в (10.25) последовательно значения $y = 0$ и $x = 0$.

♦ ПРИМЕР

Найти отрезки, отсекаемые прямой $3x - 2y - 12 = 0$ на осях координат.

РЕШЕНИЕ. Следуя предшествующему ходу рассуждений, получим:

$$\frac{3}{12}x - \frac{2}{12}y = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 1.$$

На оси Ox прямая отсекает отрезок, равный 4, на оси Oy — равный -6 (т. е. ниже оси абсцисс).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат, а также осей координат.
2. Запишите уравнение прямой, проходящей через начало координат.
3. В каких случаях угловой коэффициент является величиной положительной и в каких — отрицательной?
4. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой.
5. Проведите исследование общего уравнения прямой, перечислите частные случаи.
6. Какими способами можно построить прямую $Ax + By + C = 0$?
7. Выведите уравнение прямой в отрезках на осях.
8. Как построить прямую, используя уравнение прямой в отрезках на осях?

§ 72. Системы прямых

1. Уравнение пучка прямых. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_1; y_1)$. Пусть прямая

$$y = kx + b \tag{10.26}$$

проходит через эту точку, тогда

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{10.27}$$

В уравнении (10.27) два неизвестных параметра: k и b. Исключим параметр b: $b = y_1 - kx_1$. Подставив это значение b в формулу

(10.26), получим уравнение, содержащее только один неизвестный параметр k:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (10.28)$$

здесь k может принимать любые числовые значения, поэтому через точку $M(x_1; y_1)$ может проходить не одна прямая, а множество прямых (за исключением прямой, перпендикулярной оси Ox, так как в этом случае $k = \operatorname{tg} 90°$).

Уравнение (10.28) называется ***уравнением пучка прямых***.

♦ ПРИМЕР

Записать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(2; -3)$.

РЕШЕНИЕ. Координаты точки M подставим в формулу (10.28); получим $y + 3 = k(x - 2)$.

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Составим уравнение прямой, проходящей через две произвольные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Пусть точка M_1 является центром пучка прямых и искомая прямая, таким образом, окажется одной из прямых пучка, проходящей через точку M_2.

Подставим в формулу (10.28) вместо текущих координат координаты точки M_2: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (10.29)$$

Таким образом, получена формула для вычисления углового коэффициента прямой, проходящей через две заданные точки. Подставив выражение (10.29) в формулу (10.28), получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (10.30)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

♦ ПРИМЕР

Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 3)$ и M_2 $(-3; 4)$.

РЕШЕНИЕ. Угловой коэффициент $k = (4 - 3)/(-3 - 2) = -1/5$ по формуле (10.29). Подставим значение k и координаты M_1 в уравнение (10.30):

$$y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow x + 5y - 12 = 0.$$

3. Угол между двумя прямыми. Определим угол между двумя непараллельными прямыми по их уравнениям. Пусть даны две прямые: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Определим угол между этими прямыми (рис. 157).

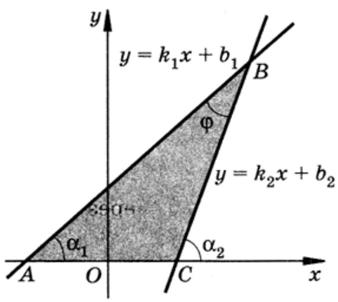


Рис. 157

Обозначим углы, образуемые данными прямыми с положительным направлением оси Ox, через α_1 и α_2, а угол между прямыми — через φ. Для $\triangle ABC$ угол α_2 является внешним, поэтому он равен сумме внутренних, с ним не смежных, т. е. $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, следовательно, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если углы равны, то равны и тангенсы этих углов, поэтому $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$. По формуле для тангенса разности двух углов (3.68)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1},$$

но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (10.31)$$

По формуле (10.31) можно вычислить угол между двумя прямыми по их угловым коэффициентам.

♦ ПРИМЕР

Найти острый угол между прямыми $\boldsymbol{Q}$: $3x + 4y - 12 = 0$ и $\boldsymbol{R}$: $5x - 12y - 16 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение $\boldsymbol{Q}$ преобразуем к виду $y = -\frac{3}{4}x + 3$, уравнение $\boldsymbol{R}$ — к виду $y = \frac{5}{12}x - \frac{4}{3}$, следовательно, угловые коэффициенты прямых $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ соответственно $k_Q = -\frac{3}{4}$, $k_R = \frac{5}{12}$. По формуле (10.31)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5/12 - (-3/4)}{1 + (5/12)(-3/4)} = \frac{56}{33} \approx 1{,}697.$$

Значению $\operatorname{tg}\varphi \approx 1{,}697$ соответствует угол $\varphi \approx 59°{,}5$.

4. Условие параллельности двух прямых. Если прямые параллельны, то их углы с осью Ox равны, поэтому и их угловые коэффициенты равны, т. е. условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Справедливо и обратное утверждение. Если $k_1 = k_2$, то в выражении (10.31) числитель равен нулю, в этом случае тангенс угла между прямыми $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = 180°$.

♦ ПРИМЕР

Составить уравнение прямой $\boldsymbol{L}_1$, проходящей через точку $(-2; 4)$ параллельно прямой $\boldsymbol{L}$: $2x - 3y + 6 = 0$ (рис. 158).

РЕШЕНИЕ. Для прямой $\boldsymbol{L}$ угловой коэффициент $k_L = 2/3$, тогда и для прямой $\boldsymbol{L}_1$ угловой коэффициент $k_{L_1} = 2/3$. Следовательно, уравнение прямой $\boldsymbol{L}_1$: $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 2)$ или $2x - 3y + 16 = 0$.

5. Условие перпендикулярности двух прямых. Если прямые перпендикулярны, то углы φ_1 и φ_2, под которыми они пересекают ось Ox, различаются на $90°$, $\varphi_2 = \varphi_1 + 90°$ (рис. 159), поскольку внешний

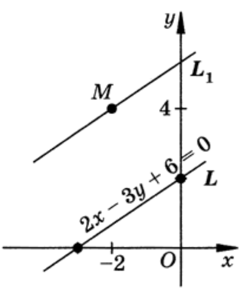


Рис. 158

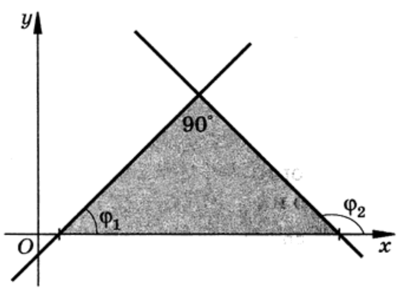


Рис. 159

угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Соответственно равны друг другу и тангенсы углов: $\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90°)$, но по формуле (3.41) $\operatorname{tg}(\varphi_1 + 90°) = -\operatorname{ctg}\varphi_1$, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_1$ или $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$. Заменив $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ на k_2 и k_1, получим $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или

$$1 + k_1k_2 = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение. Пусть $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\varphi_1 + 90°)$. Следовательно, $\varphi_2 = \varphi_1 + 90°$, т. е. угол между данными прямыми равен 90°, а это и значит, что они перпендикулярны.

6. Пересечение прямых. Чтобы найти точку пересечения прямых $Ax + By + C = 0$ и $\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C} = 0$, необходимо решить систему этих уравнений, так как точка пересечения двух прямых является их общей точкой, и, следовательно, координаты точки пересечения должны удовлетворять каждому из уравнений прямых.

♦ ПРИМЕР

Найти расстояние от точки $M(6; 8)$ до прямой $\boldsymbol{L}$: $4x + 3y + 2 = 0$ (рис. 160).

РЕШЕНИЕ. На прямой $\boldsymbol{L}$ необходимо найти точку A, которая была бы основанием перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $\boldsymbol{L}$.

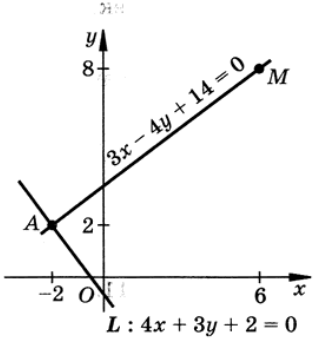


Рис. 160

Угловой коэффициент прямой $\boldsymbol{L}$: $k_L = -\frac{4}{3}$. Угловой коэффициент перпендикуляра $k_\perp$ будет обратным по величине и противоположным по знаку, т. е. $k_\perp = \frac{3}{4}$. Составим уравнение прямой, проходящей через точку M, с угловым коэффициентом $k_\perp$:

$$y - 8 = \frac{3}{4}(x - 6) \Rightarrow 3x - 4y + 14 = 0.$$

Решим систему уравнений прямой L и перпендикуляра:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2 = 0, \\ 3x - 4y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = -2,\ y = 2).$$

Таким образом, точка A имеет координаты $(-2; 2)$. По (10.18) расстояние между точками A и M:

$$AM = \sqrt{(6+2)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выпишите уравнение пучка прямых.
2. Выпишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
3. Как можно вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки?
4. Как вычисляется угол между двумя прямыми через их угловые коэффициенты?
5. Сформулируйте условие параллельности двух прямых.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых.
7. Как находится точка пересечения двух прямых?
8. Как найти расстояние от данной точки до прямой?

ГЛАВА 11. Кривые второго порядка

§ 73. Окружность

1. Уравнение окружности с центром в начале координат.

Окружностью называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от точки, называемой центром.

Пусть центр окружности с радиусом R находится в начале координат O. Выберем на окружности произвольную точку $M(x; y)$.

По (10.18) расстояние между двумя точками $OM = R = \sqrt{x^2 + y^2}$ или

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.} \qquad (11.1)$$

Координаты любой точки окружности удовлетворяют (11.1).

2. Уравнение окружности с центром в произвольной точке. Пусть окружность радиуса R имеет центр в точке $C(a; b)$. Выберем на окружности произвольную точку $M(x;\ y)$. Также по (10.18) получим $CM = R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ или

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.} \qquad (11.2)$$

♦ ПРИМЕР

Составить уравнение окружности с центром $C(-3;\ 4)$ и радиусом $R = 5$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (11.2) получаем

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

3. Уравнение окружности как частный случай общего уравнения второй степени. Раскроем скобки в (11.2) и перегруппируем члены:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \qquad (11.3)$$

Умножив все члены уравнения (11.3) на $A \neq 0$, получим

$$Ax^2 + Ay^2 - 2Aax - 2Aby + Aa^2 + Ab^2 - AR^2 = 0. \qquad (11.4)$$

Положим $-2Aa = B$, $-2Ab = C$, $Aa^2 + Ab^2 - AR^2 = D$, тогда выражение (11.4) принимает вид

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0. \qquad (11.5)$$

Уравнение (11.5) является частным случаем общего уравнения второй степени, имеющего вид

$$\tilde{A}x^2 + \tilde{B}xy + \tilde{C}y^2 + \tilde{D}x + \tilde{E}y + \tilde{F} = 0. \qquad (11.6)$$

Уравнение окружности (11.5) отличается от (11.6) тем, что в нем коэффициенты при однородных членах x^2 и y^2 равны, а член, содержащий xy, отсутствует.

♦ ПРИМЕР

Найти координаты центра C и радиус R окружности $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Дополним двучлены $(x^2 - 8x)$ и $(y^2 - 10y)$ до полных квадратов:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 16 + 25 + 8$$

или $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49$. Таким образом, центр C имеет координаты $(4;\ 5)$, $R = 7$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Выпишите уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом, равным R.
2. Выпишите уравнение окружности с радиусом R и с центром в произвольной точке.
3. Как получить уравнение окружности в общем виде и чем оно отличается от общего уравнения второй степени?
4. Где расположены центры окружностей, заданных уравнениями $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ и $(x - a)^2 + y^2 = R^2$?

§ 74. Эллипс

Рассмотрим кривую второго порядка

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad (11.7)$$

здесь $a > 0$, $b > 0$, $a > b$. Кривая, заданная уравнением (11.7), называется ***эллипсом***.

Из уравнения (11.7) следует, что

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \text{ или } |x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b.$$

Из последних двух неравенств следует, что эллипс есть кривая, ограниченная прямоугольником со сторонами $2a$ и $2b$ и с центром в начале координат (рис. 161).

Из уравнения (11.7) следует также, что если $M(x; y)$ принадлежит эллипсу, то точки с координатами $(x; -y)$ $(-x; y)$, $(-x; -y)$ тоже принадлежат эллипсу. Из этого следует, что эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Начало координат — центр симметрии называется ***центром эллипса***. Точки пересечения осей координат — осей симметрии с эллипсом $A_1(a; 0)$, $B_1(0; b)$, $A_2(-a; 0)$, $B_2(0; -b)$ — называются ***вершинами эллипса***. Отрезок оси Ox длиной $2a$ между вершинами A_1 и A_2 называется ***большой осью***, а отрезок оси Oy длиной $2b$ между вершинами B_1 и B_2 называется ***малой осью*** эллипса.

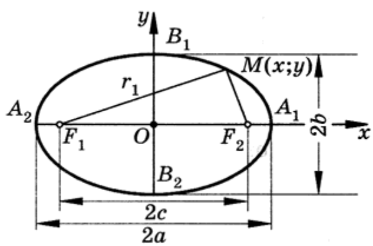


Рис. 161

Благодаря симметрии эллипса относительно осей координат для анализа его формы достаточно изучить его часть, содержащуюся в одной из координатных четвертей, например $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Из уравнения (11.7) получим

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

отсюда следует, что графиком эллипса в I четверти является непрерывная кривая, ординаты которой убывают от b до 0 при движении от точки B_1 до точки A_1.

Введем некоторое число $c > 0$ такое, что

$$c^2 = a^2 - b^2,\ c < a. \tag{11.8}$$

На оси абсцисс отметим точки $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Эти точки называются ***фокусами*** эллипса. Так как $c < a$, фокусы F_1 и F_2 лежат между вершинами A_1 и A_2.

Расстояния r_1 и r_2 от любой точки M на кривой эллипса до фокусов F_1 и F_2 назовем ***радиусами*** точки M. Длину r_1 находим как расстояние между точками M и F_1. По (10.18)

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}.$$

Аналогично

$$r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}.$$

После преобразований получим $r_1 = \left|\frac{xc}{a} + a\right|$, $r_2 = \left|-\frac{xc}{a} + a\right|$,

$$\boldsymbol{r_1 + r_2 = 2a.} \tag{11.9}$$

Равенство (11.9) дает возможность сформулировать определение эллипса.

> Эллипсом называется геометрическое место точек M, для каждой из которых сумма расстояний r_1 и r_2 до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная.

Число

$$e = -\frac{c}{a}, \quad 0 < e < 1 \tag{11.10}$$

называется ***эксцентриситетом*** эллипса. Эксцентриситет характеризует степень вытянутости эллипса.

Если в уравнении (11.7) положить $b = a$, то оно превратится в уравнение окружности с радиусом a (это видно из сравнения с выражением (11.1)). При этом $c = 0$, т. е. координаты фокусов совпадают с координатами центра эллипса — окружности.

Таким образом, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.

♦ ПРИМЕР 1

Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а большая ось равна 10.

РЕШЕНИЕ. Из условия следует, что $a = 5$, $c = 3$. По формуле (11.8) находим квадрат малой оси: $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Согласно формуле (11.7) уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

♦ ПРИМЕР 2

Составить уравнение эллипса, фокусы которого находятся в точках $(-4; 0)$, $(4; 0)$, а эксцентриситет $e = 0{,}8$.

РЕШЕНИЕ. По условию $c = 4$, $e = \dfrac{c}{a} = 0{,}8$. Получаем значение большой оси $a = 5$. По формуле (11.8) $b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$. Следовательно, уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните геометрический смысл параметров, входящих в уравнение эллипса.
2. Дайте определение центра симметрии и осей симметрии эллипса.
3. Какие точки называются фокусами эллипса?
4. Дайте определение эллипса.
5. Что называется эксцентриситетом эллипса?
6. Какая существует связь между уравнениями эллипса и окружности?

§ 75. Гипербола

Рассмотрим уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (11.11)$$

Кривая, отвечающая этому уравнению, называется ***гиперболой*** (рис. 162).

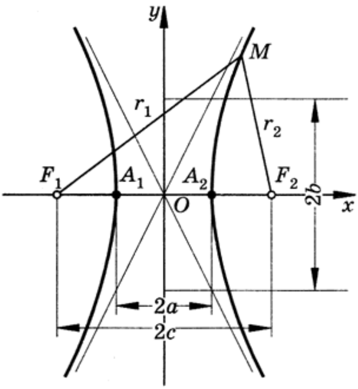


Рис. 162

Из формулы (11.1) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ или $|x| \geqslant a$, так что все точки гиперболы лежат вне полосы $|x| \leqslant a$, кроме точек $A_1(-a;\, 0)$ и $A_2(a;\, 0)$, лежащих на границе полосы и называемых ***вершинами*** гиперболы. Отрезок длиной $2a$ между ними называется ***действительной осью гиперболы***. При этом в отличие от эллипса гипербола является неограниченной кривой, что следует из модификации уравнения гиперболы $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ или

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \tag{11.12}$$

В самом деле, $|y| \to \infty$ при $x \to \pm\infty$.

Если точка $M(x;\, y)$ принадлежит кривой гиперболы, то, очевидно, и точки $(-x;\, y)$, $(x;\, -y)$, $(-x;\, -y)$ тоже принадлежат этой кривой. Таким образом, гипербола симметрична относительно осей координат и относительно начала координат, являющегося ***центром*** гиперболы.

Из формулы (11.11) следует, что гипербола не пересекает оси Oy, так как если положить $x = 0$, то (11.11) преобразуется в уравнение $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, не имеющее действительных корней. Отрезок длиной $2b$ от точки $(0;\, -b)$ до точки $(0;\, b)$ на оси Oy называется ***мнимой осью гиперболы***.

Благодаря симметрии гиперболы относительно осей координат для ее построения и анализа достаточно изучить поведение кривой в одной из координатных четвертей, например в I четверти, т. е. в области $x \in [a, +\infty)$, $y \geqslant 0$. Из выражения (11.12) следует, что при изменении x от a до $+\infty$ ордината y возрастает от 0 до $+\infty$. При этом $y < \frac{b}{a}x$; это означает, что гипербола в I четверти лежит под прямой

$$y = \frac{b}{a}x, \tag{11.13}$$

проходящей через начало координат. Прямая, определяемая уравнением (11.13), называется ***асимптотой*** гиперболы.

При $x \to +\infty$ разность ординат асимптоты и гиперболы $\delta \to 0$. В самом деле, $\delta = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$ $= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$, $\delta \to 0$ при $x \to +\infty$. Таким образом, асимптота и график гиперболы неограниченно сближаются при неограниченном возрастании абсциссы x.

Учитывая симметрию гиперболы относительно координатных осей, можно построить график этой функции на всем координатном поле: график имеет две ветви, пересекающие ось Ox в точках $(-a; 0)$ и $(a; 0)$, абсолютные значения ординат неограниченно увеличиваются с ростом абсолютного значения абсцисс, будучи ограниченными значениями ординат асимптот, имеющих уравнения: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Положим

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{11.14}$$

очевидно, $c > a$. Точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ называются ***фокусами*** гиперболы. Из равенства (11.14) следует, что фокусы F_1 и F_2 лежат за вершинами гиперболы и, следовательно, вне полосы $|x| < a$. Расстояния r_1 и r_2 от любой точки $M(x; y)$ гиперболы до фокусов называются ***радиусами*** точки M.

Длину радиуса $r_1 = MF_1$ определим по формуле (10.18):

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \left|\frac{xc}{a} + a\right|. \tag{11.15}$$

Аналогично

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|\frac{xc}{a} - a\right|. \tag{11.16}$$

Вычтя (11.15) из (11.16) и наоборот, получим соотношение

$$\boldsymbol{|r_1 - r_2| = 2a}, \tag{11.17}$$

благодаря которому можно сформулировать определение гиперболы.

> Гиперболой называется геометрическое место точек M, для каждой из которых разность расстояний r_1, r_2 до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная: $r_1 - r_2 = 2a$ (правая ветвь); $r_2 - r_1 = 2a$ (левая ветвь).

Величина

$$e = \frac{c}{a} \qquad (11.18)$$

называется ***эксцентриситетом гиперболы***; поскольку $c > a$, величина $e > 1$.

Если в уравнении гиперболы (11.11) $b = a$, то это уравнение сводится к $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется ***равнобочной***. Асимптоты такой гиперболы имеют уравнения $y = \pm x$.

♦ ПРИМЕР 1

Дано уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$. Найти координаты ее вершин и фокусов, определить ее эксцентриситет и составить уравнения асимптот.

РЕШЕНИЕ. Если пользоваться предшествующими обозначениями, то $a = 9$, $b = 12$. По формуле (11.17) $c = \pm\sqrt{81 + 144} = \pm 15$. Следовательно, вершины гиперболы имеют координаты $(-9; 0)$ и $(9; 0)$, а фокусы — $(-15; 0)$ и $(15; 0)$. По формуле (11.18) $e = \frac{c}{a} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. Подставив значения a и b в выражение (11.13), получим уравнения асимптот: $y = \pm\frac{4}{3}x$.

♦ ПРИМЕР 2

Составить уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ и она проходит через точку $M(6; -4)$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (11.13) $\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. Подставим в выражение (11.11) координаты точки M и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6^2}{a^2} - \dfrac{(-4)^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{b}{a} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \ a = \pm\sqrt{12}\,, b = \sqrt{8}\,.$$

Получаем уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните геометрический смысл параметров, входящих в уравнение гиперболы.

2. Дайте определение центра симметрии и осей симметрии гиперболы.
3. Какие точки называются фокусами гиперболы?
4. Дайте определение гиперболы.
5. Что называется эксцентриситетом гиперболы?
6. Какая гипербола называется равносторонней?

§ 76. Парабола

1. Парабола с вершиной в начале координат. Рассмотрим уравнение кривой второго порядка

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{11.19}$$

Уравнение (11.19) называется ***уравнением параболы***, число p является ***параметром параболы.***

Парабола является неограниченной кривой, так как $y = \pm\sqrt{2px} \to \infty$ при $x \to \infty$. Парабола имеет только одну ось симметрии — ось Ox, называемую ***осью параболы***, и не имеет центра симметрии. Точка пересечения оси параболы с кривой называется ***вершиной*** параболы. Точка $F\left(\frac{p_2}{2}; 0\right)$(рис. 163) называется ***фокусом*** параболы. Проведем прямую

$$x = -\frac{p}{2}, \tag{11.20}$$

называемую ***директрисой*** параболы. Расстояние d от любой точки $M(x;\ y)$ параболы до директрисы составляет $d = |MK| = x + \frac{p}{2}$.

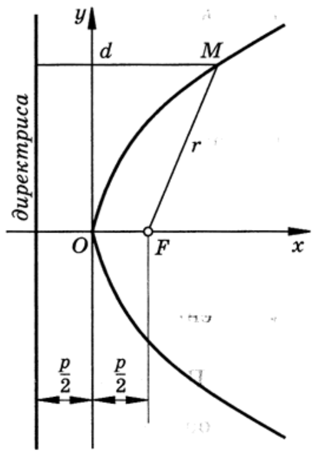


Рис. 163

Вычислим расстояние r от точки M до фокуса параболы F:

$$r = |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (2px)} =$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Сопоставляя r и d, можно сделать вывод, что $r = d$, и сформулировать определение параболы.

Параболой называется геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние r до данной точки F (фокуса) равно расстоянию d до данной прямой (директрисы).

Если в уравнении (11.19) поменять местами переменные x и y, то получим уравнение

$$x^2 = 2py \tag{11.21}$$

параболы, для которой осью симметрии служит ось Oy. Решив уравнение (11.21) относительно y, получим $y = \frac{1}{2p}x^2$, а положив $\frac{1}{2p} = a$, придем к уже известному из курса алгебры виду уравнения параболы $y = ax^2$.

Если для параболы осью симметрии служит ось Ox, то при $p > 0$ ее ветви направлены вправо, при $p < 0$ — влево. Когда же осью параболы является ось Oy, то если в уравнении (11.21) $p > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $p < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

♦ ПРИМЕР 1

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус F находится в точке (3; 0).

РЕШЕНИЕ. Используем предшествующие обозначения: фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, отсюда $p/2 = 3$, $p = 6$. По формуле (11.19) уравнение параболы имеет вид $y^2 = 12x$.

♦ ПРИМЕР 2

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая $x = -4$.

РЕШЕНИЕ. Расстояние от директрисы до начала координат составляет $p/2$, следовательно, $p = 8$. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 16x$.

♦ ПРИМЕР 3

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $M(4; 2)$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение такой параболы имеет вид (11.21). Подставив в него координаты точки M, найдем, что $p = 4$. Уравнение параболы имеет вид $x^2 = 8y$.

2. Параболы со смещенной вершиной. Пусть парабола имеет вершину с координатами $(a; b)$. Если ось симметрии такой параболы параллельна оси Ox, то ее уравнение имеет вид

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \tag{11.22}$$

(при $p > 0$ ветви направлены вправо, при $p < 0$ ветви направлены влево); если же ось параболы параллельна оси Oy, то уравнение такой параболы имеет вид

$$(x - a)^2 = 2p(y - b) \tag{11.23}$$

(при $p > 0$ ветви направлены вверх, при $p < 0$ — вниз). В каждом из этих уравнений расстояния от фокуса параболы до ее вершины и от вершины до директрисы равны и составляют $p/2$.

♦ ПРИМЕР

Составить уравнение параболы, имеющей вершину A с координатами (1; 2) и проходящей через точку $M(4; 8)$, если ось симметрии параболы параллельна оси Ox.

РЕШЕНИЕ. Подставим в уравнение (11.22) координаты вершины A и точки M: $(8 - 2)^2 = 2p(4 - 1)$, откуда $p = 6$. Подставив теперь в уравнение (11.22) найденное значение p и координаты вершины A, получим $(y - 2)^2 = 12(x - 1)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какой смысл имеет параметр, входящий в уравнение параболы с вершиной в начале координат?
2. Что называется осью симметрии параболы?
3. Что называется вершиной, фокусом и директрисой параболы?
4. Каким свойством обладает директриса параболы?
5. Дайте определение параболы.
6. Как записывается уравнение параболы, если ее ось совпадает с осью Oy?
7. Что определяет направление ветвей параболы?
8. Запишите уравнения параболы с вершиной в точке $(a; b)$ и осями, параллельными осям Ox и Oy.

ЧАСТЬ 3. ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

ГЛАВА 12. Прямые и плоскости в пространстве

§ 77. Основные понятия стереометрии

1. Определения и обозначения. Стереометрией* называется раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии свойства геометрических фигур устанавливаются с помощью доказательства теорем**, которые основываются на аксиомах*** — математических предложениях, принимаемых без доказательства.

Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Для обозначения точек будем использовать прописные буквы латинского алфавита — A, B, C, ..., прямые будем обозначать строчными буквами латинского алфавита — a, b, c, ... и плоскости — строчными буквами греческого алфавита — α, β, γ, ...

2. Основные свойства плоскости. Введем группу аксиом, выражающих основные свойства плоскостей в пространстве.

I. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

II. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

III. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Следствием этих аксиом являются следующие теоремы.

■ ТЕОРЕМА I

Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость, и притом только одну.

---

* От греч. στερεός — объемный, пространственный и μετροέω — мера.

** От греч. υεωρέω — рассматриваю.

*** От греч. αξιόω — считаю достойным, настаиваю, требую.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная точка и две точки прямой составляют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме I через них проходит единственная плоскость. По аксиоме III данная прямая лежит в этой плоскости.

■ ТЕОРЕМА II

Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На каждой из прямых можно взять по одной необщей точке. Вместе с точкой пересечения прямых они образуют три точки, не лежащие на одной прямой. По аксиоме I через них проходит единственная плоскость. По аксиоме III обе прямые лежат в ней.

■ ТЕОРЕМА III

Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I через одну из параллельных прямых и произвольную точку другой прямой можно провести плоскость, и притом только одну.

3. Взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве можно свести к следующим случаям.

I. Прямые ***пересекаются***, тогда они лежат в одной плоскости (рис. 164, *а*).

II. Прямые ***параллельны*** — тогда они тоже лежат в одной плоскости (в частном случае совпадают) — рисунок 164, *б*.

III. Прямые не пересекаются и не параллельны — такие прямые называются ***скрещивающимися*** (примером такого рода прямых могут служить ребра куба — рис. 164, *в*).

Возможны следующие варианты взаиморасположения прямой и плоскости в пространстве:

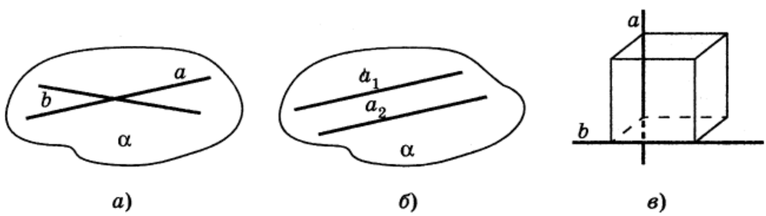


Рис. 164

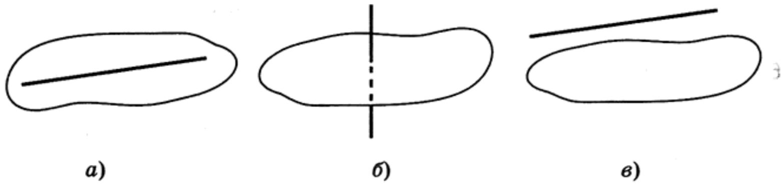


Рис. 165

I. Прямая ***лежит в плоскости*** (рис. 165, *а*).

II. Прямая и плоскость имеют ***одну общую точку***, в которой они пересекаются (рис. 165, *б*).

III. Прямая и плоскость не имеют ***ни одной общей точки*** — в этом случае они называются ***параллельными*** (рис. 165, *в*).

Плоскости в пространстве могут принимать следующие положения относительно друг друга:

I. Плоскости ***совпадают***.

II. Две плоскости ***не имеют общих точек*** — в этом случае они называются ***параллельными***.

III. Две плоскости могут ***пересекаться по прямой*** — в этом случае они не имеют других общих точек вне этой прямой.

♦ПРИМЕР

Построить точку пересечения данной прямой a с данной плоскостью α (рис. 166).

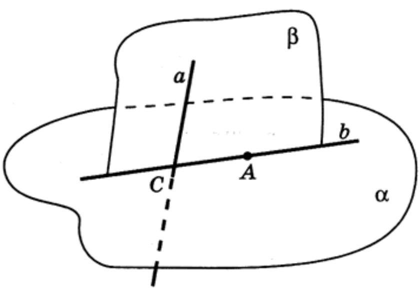


Рис. 166

РЕШЕНИЕ. Выберем на плоскости α произвольную точку A, $A \notin a$. Через точку A и прямую a проведем плоскость β. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b. В плоскости β находим точку C пересечения прямых a и b — эта точка и является искомой.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какой раздел геометрии называется стереометрией?
2. Какие предложения называются аксиомами?
3. Какие предложения называются теоремами?
4. Сформулируйте аксиомы плоскости и следствия из них.

5. Назовите возможные варианты взаимного положения прямых в пространстве.
6. Перечислите возможные варианты взаимного положения прямой и плоскости в пространстве.
7. Приведите возможные варианты взаимного положения двух плоскостей в пространстве.

§ 78. Параллельность прямой и плоскости. Параллельные плоскости

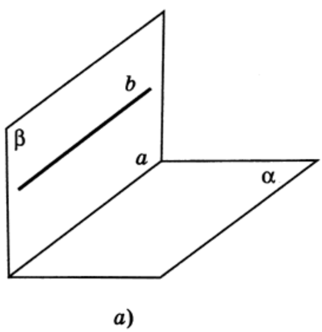
1. Параллельные прямая и плоскость. Определение параллельности прямой и плоскости было сформулировано в предыдущем параграфе.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

■ ТЕОРЕМА

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α — плоскость, b — не лежащая в ней прямая и a — прямая в плоскости α, параллельная прямой b (рис. 167, *а*). Проведем через прямые a и b плоскость β. Она отлична от α, так как прямая b не лежит в плоскости α. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Если бы прямая b пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a. Это невозможно, так как $a \parallel b$. Следовательно, прямая b не пересекает плоскость α, значит, $a \parallel \alpha$, что и требовалось доказать.



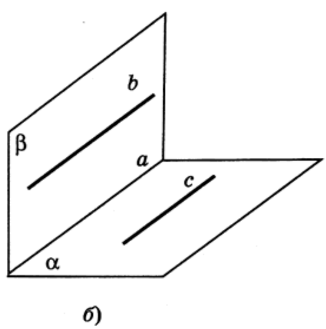


Рис. 167

■ ТЕОРЕМА

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямая b лежит в плоскости β, $b \parallel \alpha$, а плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 167, *а*). По условию $b \in \beta$, $a \in \beta$. Допустим, что прямые b и a пересекаются. Тогда прямая b и плоскость α тоже пересекаются, что противоречит условию $b \parallel \alpha$. Следовательно, допущение, что прямые a и b пересекутся, неверно и $b \parallel a$, что и требовалось доказать.

Следствием последней теоремы является следующее утверждение.

Если две прямые параллельны и через каждую из них проходит плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия пересечения параллельна каждой из двух прямых.

Это утверждение можно пояснить с помощью рисунка 167, *б*: если $b \in \beta$; $c \in \alpha$; $b \parallel a$, то линия пересечения плоскостей a параллельна прямым b и c.

2. Угол между скрещивающимися прямыми. Углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны. О скрещивающихся прямых (см. § 77, п. 3) можно сказать, что это прямые, не лежащие в одной плоскости.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между их параллельными и одинаково направленными сторонами, проходящими через произвольную точку.

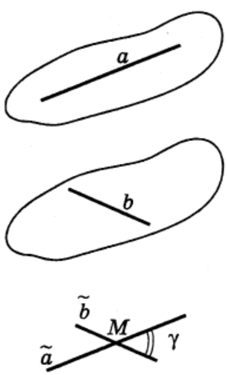


Рис. 168

Для построения такого угла γ между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис. 168) выберем произвольную точку M и проведем через нее прямую $\tilde{a}$, $\tilde{a} \parallel a$. Через эту точку проведем прямую $\tilde{b}$, $\tilde{b} \parallel b$. Один из полученных четырех попарно равных углов (обычно острый) γ принимается за угол между скрещивающимися прямыми.

Если угол между скрещивающимися прямыми a и b прямой, то такие прямые называются взаимно перпендикулярными.

3. Параллельные плоскости. В § 77, п. 3 было отмечено, что две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

■ ТЕОРЕМА (признак параллельности двух плоскостей)
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямые a и b плоскости α пересекаются в точке A (рис. 169). Прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ лежат в плоскости β: $\tilde{a} \parallel a$, $\tilde{b} \parallel b$. Допустим, что плоскости α и β пересекаются по прямой l. По условию плоскости α и β проходят через параллельные прямые a и $\tilde{a}$, следовательно, их линия пересечения $l \parallel a$, такого же рода рассуждения можно провести относительно прямых b и $\tilde{b}$, т. е. $l \parallel b$. Получилось, что через точку A проходят две прямые a и b, параллельные прямой l, что невозможно, поэтому $\alpha \parallel \beta$.

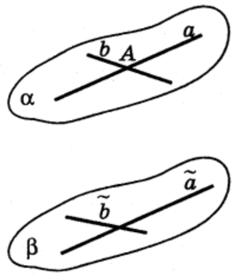


Рис. 169

Сформулируем без доказательств свойства параллельных плоскостей.

I. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

II. Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

III. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны.

IV. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Назовите признак параллельности прямой и плоскости.
2. Как найти угол между скрещивающимися прямыми?
3. Какие плоскости называются параллельными?
4. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.

§ 79. Перпендикулярные прямые и плоскости

1. Прямая, перпендикулярная к плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, называется ***перпендикулярной*** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости.

■ ТЕОРЕМА О ДВУХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым на плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \nparallel b$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $k \perp a$, $k \perp b$ (рис. 170).

Случай 1. Прямые a, b проходят через точку O пересечения прямой k с плоскостью α. Проведем на плоскости α через точку O некоторую прямую c, не совпадающую с прямыми a и b. Отметим на прямой k некоторый вектор $\overrightarrow{OK}$, на прямой c — некоторый вектор $\overrightarrow{OC}$. Докажем, что $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Разложим $\overrightarrow{OC}$ на векторы, лежащие на прямых a и b: векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и

$$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OB}. \qquad (12.1)$$

Но $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{OB}$, тогда скалярные произведения $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OK}||\overrightarrow{OA}| \cos 90° = 0$, $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OK}||\overrightarrow{OB}| \cos 90° = 0$, следовательно, по формуле (12.1) $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$. Это значит, что $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{OC}$, т. е. $k \perp c$.

В качестве прямой c была выбрана любая прямая, проходящая через точку O. Но любая прямая на плоскости α параллельна какой-либо из прямых, проходящих через точку O, поэтому можно сказать, что из перпендикулярности прямых k и c следует, что $k \perp \alpha$.

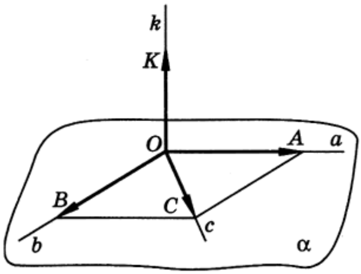


Рис. 170

Случай 2. Прямые a, b и c не проходят через точку O. Проведем через точку O прямые $\tilde{a} \parallel a$, $\tilde{b} \parallel b$, $\tilde{c} \parallel c$. По условию $k \perp a$, $k \perp b$, поэтому $k \perp \tilde{a}$, $k \perp \tilde{b}$. Таким образом, доказательство сводится к предыдущему случаю.

2. Зависимость между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей. Приведем без доказательств теоремы о параллельности прямых и плоскостей в связи с их перпендикулярностью.

■ ТЕОРЕМА I

Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой, и наоборот, если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

■ ТЕОРЕМА II

Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой, и наоборот, если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

3. Перпендикуляр и наклонная. Если через точку $A \notin \alpha$ провести прямую $AB \perp \alpha$, то основание перпендикуляра — точка B — называется ***проекцией точки** A* на плоскость α, а длина отрезка AB — длиной перпендикуляра (рис. 171). Прямая AC, не параллельная и не перпендикулярная к плоскости α, называется ***наклонной***, а точка C — ***основанием наклонной***. Отрезок BC, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, называется ***проекцией наклонной***.

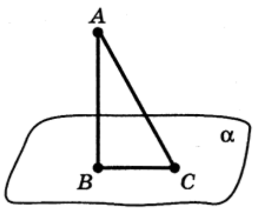


Рис. 171

■ ТЕОРЕМА

Если из точки, лежащей вне плоскости, провести к ней перпендикуляр и наклонные, то:

1) перпендикуляр короче всякой наклонной;

2) те из наклонных равны, которые имеют равные проекции;

3) из двух неравных наклонных больше та, которая имеет бо́льшую проекцию.

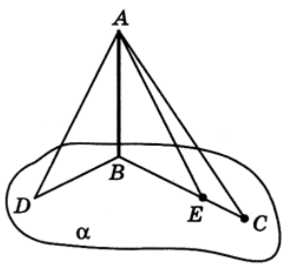


Рис. 172

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть точка $A \notin \alpha$, $AB \perp \alpha$, AC — наклонная, BC — проекция наклонной (рис. 172). Так как $AB \perp \alpha$, то $\triangle ABC$ — прямоугольный, в нем AC — гипотенуза, AB — катет, поэтому $AC > AB$.

2) Отложим от точки B в разных направлениях два равных отрезка BD и BE и из точек D и E проведем наклонные в точку A. Тогда $\triangle ABD = \triangle ABE$ (по двум катетам), следовательно, $AD = AE$.

3) Отложим от точки B в разных направлениях два неравных отрезка $BD < BC$ и из точек D и C проведем наклонные в точку A. Отложим на прямой BC отрезок $BE = BD$. В треугольнике AEC угол $\angle AEC$ — тупой, поэтому $AC > AE$, следовательно, $AC > AD$.

■ ТЕОРЕМА (обратная)

Если из точки вне плоскости провести к ней перпендикуляр и наклонные, то равные наклонные имеют равные проекции, а бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.

Доказательство легко провести методом от противного.

■ ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции, перпендикулярна к самой наклонной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и, таким образом, отрезок BC является проекцией AC на плоскость α (рис. 173). Проведем через точку C прямую $a \in \alpha$ такую, что $a \perp CB$.

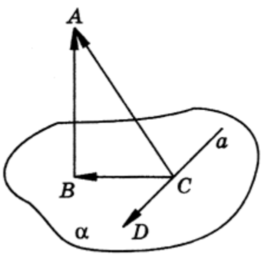


Рис. 173

Скалярное произведение $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA}$. По условию $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB} = 0$. Так как $\overrightarrow{BA} \perp \alpha$, $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BA}$, поэтому и $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, т. е. $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{CA}$, поэтому $a \perp \overrightarrow{CA}$.

■ ТЕОРЕМА (обратная)

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна к ее проекции.

4. Угол между прямой и плоскостью. Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

■ ТЕОРЕМА

Острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость меньше угла между этой прямой и любой другой прямой, лежащей на этой плоскости.

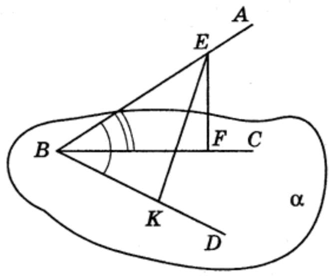


Рис. 174

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямая AB является наклонной по отношению к плоскости α, прямая CB — ее проекция на плоскость α, прямая BD — произвольная прямая на плоскости α, не совпадающая с BC (рис. 174). Из произвольной точки $E \in BA$ опустим на плоскость α перпендикуляр EF. Так как BC является проекцией прямой BA, то точка $F \in BC$. Отложим на прямой BD отрезок $BK = BF$ и соединим точки K и E. Тогда, поскольку $EF \perp \alpha$, $EK > EF$. В треугольниках BEK и BEF сторона BE является общей, $BF = BK$ и $EK > EF$. Следовательно, $\angle KBE > \angle FBE$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение прямой, перпендикулярной к плоскости.
2. Как формулируется теорема о двух перпендикулярах?
3. Какая прямая называется наклонной к плоскости?
4. Что называется проекцией наклонной на плоскость?
5. Как формулируется теорема о трех перпендикулярах?
6. Как определяется угол между прямой и плоскостью?

§ 80. Двугранные и многогранные углы

1. Двугранные и линейные углы. Прямая, лежащая в плоскости, делит плоскость на две части, каждая из которых называется ***полуплоскостью.*** Полуплоскость ограничена с одной стороны прямой.

Часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, общей ограничивающей их прямой, называется ***двугранным углом.*** Полуплоскости двугранного угла называются ***гранями***, общая прямая — ***ребром.***

Двугранный угол принято обозначать следующим образом: $\alpha AB\beta$; здесь α и β — грани, AB — ребро двугранного угла.

Два двугранных угла считают равными, если их можно совместить.

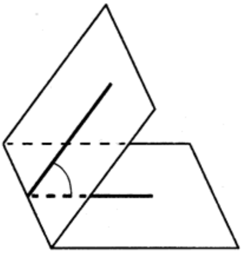


Рис. 175

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется ***линейным углом*** двугранного угла (рис. 175).

> Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Двугранный угол называется острым, прямым, тупым или развернутым в зависимости от их линейного угла.

■ ТЕОРЕМА

Если двугранные углы равны, то равны их линейные углы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть двугранные углы $\alpha AB\beta$ и $\tilde{\alpha}\tilde{A}\tilde{B}\tilde{\beta}$ равны между собой; $\angle MKN$ — линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$, а $\angle \tilde{M}\tilde{K}\tilde{N}$ — линейный угол двугранного угла $\tilde{\alpha}\tilde{A}\tilde{B}\tilde{\beta}$ (рис. 176). Совместим равные двугранные углы $\alpha AB\beta$ и $\tilde{\alpha}\tilde{A}\tilde{B}\tilde{\beta}$: тогда совместятся их ребра AB и $\tilde{A}\tilde{B}$, грани α и $\tilde{\alpha}$, а также β и $\tilde{\beta}$. Они составят один двугранный угол, в котором проведено два линейных угла: $\angle MKN$ и $\angle \tilde{M}\tilde{K}\tilde{N}$, следовательно, $\angle MKN = \angle \tilde{M}\tilde{K}\tilde{N}$.

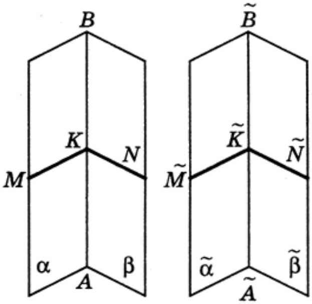


Рис. 176

■ ТЕОРЕМА (обратная)

Если линейные углы двугранных углов равны, то равны и сами двугранные углы.

Теорема доказывается от противного.

2. Площадь проекции плоской фигуры. ***Проекцией*** фигуры на плоскость является фигура, ограниченная линиями — проекциями линий, ограничивающих исходную фигуру.

■ ТЕОРЕМА

Площадь проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

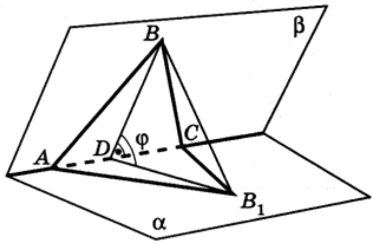


Рис. 177

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для треугольника, так как площадь любого многоугольника может быть представлена как сумма площадей треугольников.

Пусть $\triangle ABC \in \beta$, $\triangle AB_1C$ является проекцией треугольника ABC на плоскость α, угол между плоскостями α и β составляет φ (рис. 177). В треугольнике ABC из вершины B опустим высоту BD. По теореме о трех перпендикулярах ее проекция B_1D является высотой треугольника AB_1C, а угол $\varphi = \angle BDB_1$ — линейный угол двугранного угла $\alpha AC\beta$. Следовательно, площадь $S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot DB_1$, но $DB_1 = DB\cos\varphi$, тогда $S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot DB\cos\varphi = S_{\triangle ABC}\cos\varphi$.

3. Перпендикулярные плоскости. Если две плоскости, пересекаясь, образуют прямые двугранные углы, то они называются взаимно перпендикулярными.

■ ТЕОРЕМА

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

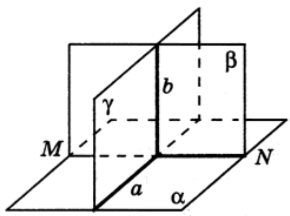


Рис. 178

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α — плоскость, b — перпендикулярная ей прямая, β — плоскость, проходящая через прямую b, MN — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 178). Докажем, что $\alpha \perp \beta$. Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, $a \perp MN$. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой MN, поскольку $MN \perp a$, $MN \perp b$. Так как прямые $a \perp b$, то плоскости $\alpha \perp \beta$.

■ ТЕОРЕМА (обратная)

Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, то он лежит в этой плоскости.

Доказательство можно провести методом от противного. Исходя из этой теоремы можно сформулировать следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна этой плоскости.

4. Многогранный угол. ***Многогранным углом*** называется часть пространства, ограниченная несколькими плоскими углами, у которых вершина общая, а стороны попарно общие. Каждые три следующие друг за другом общие стороны не лежат в одной плоскости.

Общая вершина плоских углов, образующих многогранный угол, называется ***вершиной*** многогранного угла, плоские углы — ***гранями***, общие стороны плоских углов — ***ребрами***. В зависимости от числа граней многогранные углы могут быть ***трехгранными***, ***четырехгранными*** и т. д.

Многогранный угол называется ***выпуклым***, если сечение его любой плоскостью, пересекающей все грани, является выпуклым многоугольником (рис. 179, *а*). В противном случае многогранный угол называется ***невыпуклым*** (рис. 179, *б*).

■ ТЕОРЕМА

В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть угол $\angle SKMN$ — трехгранный угол и $\angle KSN > \angle KSM$, $\angle KSN > \angle MSN$ (рис. 180). В грани KSN проведем прямую SP, образующую с SN угол $\angle PSN = \angle MSN$, и отложим на прямых SP и SM равные отрезки $SD = SB$. Через точки B и D проведем плоскость, пересекающую ребра SK и SN в точках A и C. Рассмотрим образовавшиеся треугольники: $\triangle CSD = \triangle CSB$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle BSC = \angle DSC$ по построению, $SD = SB$ по построению, сторона SC — общая). Следовательно, $BC = DC$.

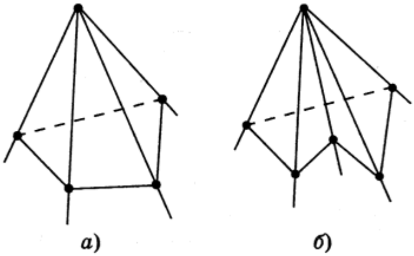


Рис. 179

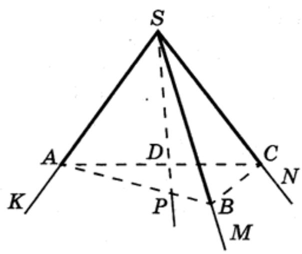


Рис. 180

В треугольнике ABC имеем $AC < AB + BC$ или $AD + DC < AB + BC$, но так как $DC = BC$, то $AD < AB$.

В треугольниках ASD и ASB сторона AS — общая, $SD = SB$ и $AD < AB$, из чего следует, что

$$\angle ASD < \angle ASB.$$

Прибавив к левой части последнего равенства угол $\angle DSC$, а к правой — равный ему угол $\angle BSC$, получим:

$$\angle ASD + \angle DSC < \angle ASB + \angle BSC$$

или

$$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC,$$

что и требовалось доказать.

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

> Всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

♦ ПРИМЕР

Доказать, что если два плоских угла трехгранного угла острые и равны между собой, то проекция их общего ребра на плоскость третьего угла есть его биссектриса.

РЕШЕНИЕ. Пусть $\angle ASB = \angle ASC$ — острые; SA_1 — проекция ребра SA на плоскость CSB (рис. 181). Проведем $A_1K \perp SB$, $A_1M \perp SC$.

По теореме о трех перпендикулярах $AK \perp SB$, $AM \perp SC$. Треугольники ASK и ASM равны ($\angle ASB = \angle ASC$, гипотенуза AS — общая), следовательно, $SK = SM$, $AK = AM$, но A_1K и A_1M — проекции равных наклонных, поэтому $A_1K = A_1M$. Таким образом, $\triangle A_1SK = \triangle A_1SM$, т. е. SA — биссектриса угла $\angle BSC$.

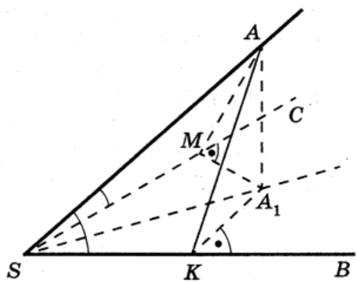


Рис. 181

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется двугранным углом? Его ребром? Гранями?
2. Что называется линейным углом двугранного угла?
3. Какая существует зависимость между двугранными углами и их линейными углами?

4. Какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
5. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
6. Что называется многогранным углом? Его вершиной? Ребрами? Гранями?

ГЛАВА 13. Многогранники и площади их поверхностей

§ 81. Многогранники и их основные свойства

1. Понятие о многогранниках. Тело, ограниченное плоскими многоугольниками, называется ***многогранником*** (рис. 182). Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются ***гранями***, их стороны — ***ребрами***, а вершины — ***вершинами*** многогранника.

Грани, имеющие общее ребро, называются ***смежными***. Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** многогранника.

Многогранники различают по форме и по числу граней.

Многогранник называется ***выпуклым***, если отрезок, соединяющий любые две внутренние точки многогранника, не пересекает его поверхности; в противном случае многогранник называется ***невыпуклым***, например, на рисунке 182 изображен невыпуклый многогранник.

2. Призма. ***Призмой*** называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами (***основаниями*** призмы), а все остальные грани (***боковые***) пересекаются по параллельным прямым (рис. 183). Ребра

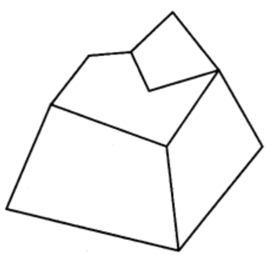


Рис. 182

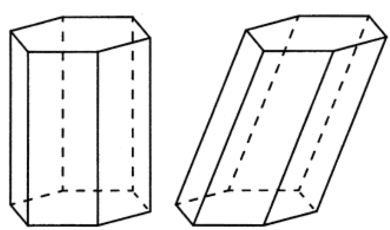


Рис. 183

оснований называются ***сторонами оснований***, общие ребра боковых граней — ***боковыми ребрами***.

Призму называют ***прямой***, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскостям оснований. Непрямая призма называется ***наклонной***. Прямую призму называют ***правильной***, если основанием ее служит правильный многоугольник. Призмы могут быть треугольными, четырехугольными и т. д. На рисунке 183 изображены шестиугольные призмы (слева прямая, справа наклонная).

Боковые ребра призмы равны между собой, боковые грани являются параллелограммами. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие в одной грани, называется ***диагональю*** призмы (на рис. 184 изображена одна из диагоналей A_1C).

Перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость другого основания, называется ***высотой*** призмы (на рис. 185 — высота призмы h).

Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не лежащих в одной грани, называется ***диагональной плоскостью***. Сечения, образующиеся от пересечения диагональной плоскости с гранями призмы, называются диагональными сечениями. На рисунке 184 изображено диагональное сечение AA_1C_1C.

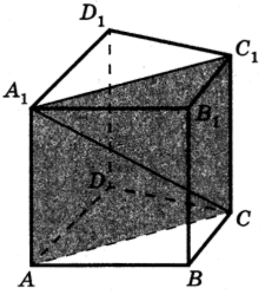


Рис. 184

Если плоскость сечения перпендикулярна боковым ребрам призмы или их продолжениям, то она называется ***перпендикулярным сечением***.

Свойства правильной призмы

I. Боковые грани равны между собой.

II. Двугранные углы при них равны между собой.

III. Любая точка оси призмы равноудалена от всех вершин любого из оснований призмы.

IV. Любая точка оси равноудалена от всех граней призмы.

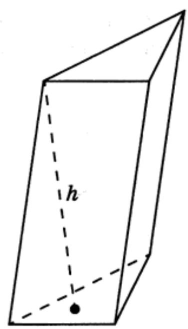


Рис. 185

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется многогранником?
2. Что называется гранями, ребрами и вершинами многогранника?
3. Какой многогранник называется призмой?
4. Что называется диагональю, высотой и диагональным сечением призмы?
5. Какая призма называется прямой?
6. Какая призма называется правильной?

§ 82. Параллелепипед

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется ***параллелепипедом***. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются ***противолежащими***.

■ ТЕОРЕМА

Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

Доказательства теоремы приводить не будем. Из теоремы следует, что любая грань параллелепипеда может быть принята за его основание.

■ ТЕОРЕМА

В параллелепипеде диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 — диагонали параллелограмма P (рис. 186). Через параллельные ребра A_1B_1 и DC проведем сечение A_1B_1CD, в котором стороны $A_1B_1 = DC$, $A_1B_1 \parallel DC$, так как $A_1B_1 = AB$ и $DC = AB$. Следовательно, сечение A_1B_1CD является параллелограммом. Диагонали параллелепипеда A_1C и B_1D являются диагоналями параллелограмма, поэтому эти диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. Диагональ A_1C пересекает диагональ AC_1 в точке O и делится в ней пополам.

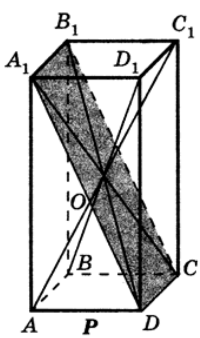


Рис. 186

Следовательно, все четыре диагонали проходят через одну точку и делятся в ней пополам, что и требовалось доказать.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны его основанию, называется

прямым. Непрямой параллелепипед называется ***наклонным***, все его грани являются параллелограммами.

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется ***прямоугольным.*** Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, называется ***кубом.*** Все грани куба являются квадратами.

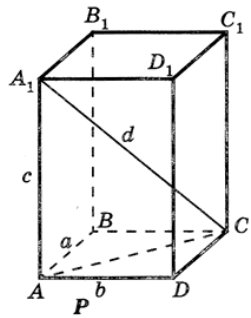


Рис. 187

ТЕОРЕМА

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в прямоугольном параллелепипеде P имеем a, b, c — непараллельные ребра, d — диагональ (рис. 187). Сторона c перпендикулярна основанию $ABCD$, следовательно, она перпендикулярна диагонали основания AC. Из треугольника AA_1C следует, что $d^2 = AC^2 + c^2$. Из треугольника ABC следует, что $AC^2 = a^2 + BC^2$, но $BC^2 = b^2$, поэтому

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какая фигура называется параллелепипедом?
2. Какая фигура называется кубом?
3. Какие свойства параллелепипеда следуют из того, что эта фигура является частным случаем призмы?
4. Сформулируйте свойства противолежащих граней параллелепипеда.
5. Сформулируйте свойства диагонали параллелепипеда.

§ 83. Пирамида

1. Основные понятия. ***Пирамидой*** называется многогранник, одной из граней которого служит многоугольник (***основание пирамиды***), а остальные грани (***боковые***) суть треугольники с общей вершиной (***вершина пирамиды***) (рис. 188). Общие стороны боковых граней называются ***боковыми ребрами*** пирамиды. По основанию лежащего в основании многоугольника пирамиды делятся на треугольные (тетраэдр), четырехугольные и т. д.

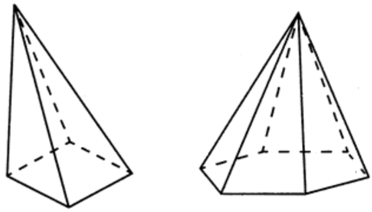


Рис. 188

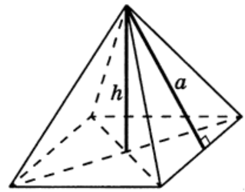


Рис. 189

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется ***высотой пирамиды*** (h на рис. 189).

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих на одной грани, называется ***диагональным сечением*** пирамиды.

Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник и вершина проектируется в центр основания, называется ***правильной***.

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется ***апофемой*** (a на рис. 189).

Основные свойства правильной пирамиды

I. Боковые ребра, боковые грани и апофемы соответственно равны.

II. Двугранные углы при основании равны.

III. Двугранные углы при боковых ребрах равны.

IV. Каждая точка высоты равноудалена от всех вершин основания.

V. Каждая точка высоты равноудалена от всех боковых граней.

2. Параллельные сечения. Опишем свойства сечений пирамиды, параллельных плоскости основания.

■ ТЕОРЕМА

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то

1) боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части;

2) сечением этой плоскости является многоугольник, подобный основанию;

3) **площади сечения и основания относятся друг к другу как квадраты их расстояний от вершины.**

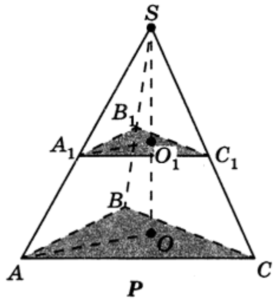


Рис. 190

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в пирамиде P высота OS делится сечением $A_1B_1C_1$, параллельным основанию ABC, на отрезки OO_1 и O_1S (рис. 190).

1) Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, ... , $A_1O_1 \parallel AO$, то

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S},\ \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S},\ \dots,\ \frac{AA_1}{A_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}.$$

В каждой из этих пропорций содержатся попарно равные отношения, поэтому

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \dots = \frac{OO_1}{O_1S}.$$

2) Треугольники: $\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB$, $\triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC$, тогда

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1S}{BS},\ \frac{B_1S}{BS} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

из чего следует

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC},\ \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC},\ \dots,$$

т. е. стороны сечения пропорциональны сторонам основания

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Стороны одноименных углов в основании и сечении взаимно параллельны, поэтому соответственные углы равны и по определению подобных треугольников

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC. \qquad (*)$$

3) Из (*) следует, что площадь сечения $S_{\text{сеч}}$ и площадь основания $S_{\text{осн}}$ подчиняются соотношению

$$\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}. \qquad (**)$$

Треугольники A_1SO и ASO подобны, $\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB$, поэтому

$$\frac{OS_1}{OS} = \frac{A_1S}{AS}, \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS},$$

следовательно,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1S}{OS}. \qquad (***)$$

Из (**) и (***) следует, что

$$\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}.$$

Доказательство легко распространяется на случай пирамиды с любым числом граней.

3. Усеченная пирамида. Часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется ***усеченной пирамидой*** (рис. 191).

Основание и соответствующее сечение усеченной пирамиды называются ***основаниями усеченной пирамиды.*** Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками, их стороны попарно параллельны, поэтому боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания на плоскость другого, называется ***высотой усеченной пирамиды*** (h на рис. 191).

Сечение усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется ***диагональным сечением*** (затемнено на рис. 191).

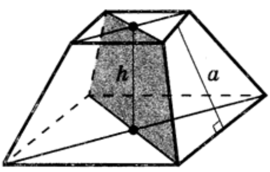


Рис. 191

Усеченная пирамида называется ***правильной***, если она составляет часть правильной пирамиды.

Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется ее ***апофемой*** (a на рис. 191).

Основные свойства правильной усеченной пирамиды

I. Боковые ребра, боковые грани и апофемы соответственно равны.

II. Двугранные углы при основании равны.

III. Двугранные углы при боковых ребрах равны.

IV. Каждая точка оси равноудалена от всех вершин основания.

V. Каждая точка оси равноудалена от плоскостей боковых граней.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется пирамидой? Ее вершиной? Основанием? Высотой?
2. Что называется диагональным сечением пирамиды?
3. Какая пирамида называется правильной?
4. Сформулируйте теорему о свойстве параллельных сечений пирамиды.
5. Что называется усеченной пирамидой?
6. Что называется правильной усеченной пирамидой?

§ 84. Площади поверхностей многогранников

1. Площади боковой и полной поверхностей призмы. Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней; площадью полной поверхности — сумма площадей всех ее граней.

ТЕОРЕМА

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра сечения, перпендикулярного боковым ребрам призмы, на длину бокового ребра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство на примере треугольной призмы, которое легко распространить на случай призмы с любым числом граней. Пусть в призме П плоскость α перпендикулярна ребрам, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = l$, P — периметр сечения $A_2B_2C_2$ (рис. 192). Боковая площадь $S_{бок} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1A_1A}$. По построению A_2B_2 является высотой параллелограмма AA_1BB_1, площадь которого, таким образом, равна $S_{AA_1B_1B} = l \cdot A_2B_2$. По аналогии площади других граней равны соответственно $l \cdot B_2C_2$ и $l \cdot C_2A_2$. Таким образом,

$$S_{бок} = l(A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2) = lP,$$

что и требовалось доказать.

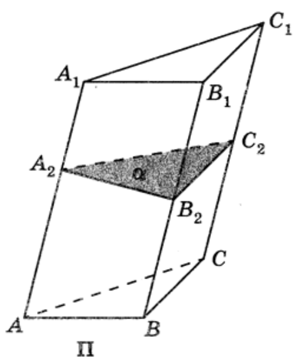


Рис. 192

В прямой призме периметр перпендикулярного сечения равен периметру основания, поэтому $S_{\text{бок}} = lP_{\text{осн}}$.

2. Площадь боковой поверхности параллелепипеда. Прямой параллелепипед является частным случаем прямой призмы, поэтому площадь его боковой поверхности равна $S_{\text{бок}} = lP_{\text{осн}}$.

3. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды. Площадью боковой поверхности пирамиды (полной и усеченной) называется сумма площадей всех ее боковых граней, площадью полной поверхности — сумма площадей всех ее граней.

■ ТЕОРЕМА

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в n-угольной пирамиде P — периметр основания, a — апофема. В правильной пирамиде все n боковых граней являются равными между собой треугольниками. Пусть основание любого из этих треугольников равно b, тогда $S_{\triangle} = ba/2$, следовательно, площадь боковой поверхности равна

$$S_{\text{бок}} = nS_{\triangle} = \frac{1}{2}nba = \frac{1}{2}Pa.$$

Очевидно,

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

4. Площадь боковой и полной поверхностей усеченной пирамиды. В правильной n-угольной усеченной пирамиде все боковые грани являются равными между собой трапециями. Обозначим длины их оснований через b и b_1, высотой в них служит апофема a. Тогда площадь трапеции равна $S_{\text{трап}} = (b + b_1)a/2$, тогда

$$S_{\text{бок}} = nS_{\text{трап}} = n\frac{1}{2}(b + b_1)a = \frac{1}{2}(P + P_1)a,$$

где P и P_1 — периметры оснований усеченной пирамиды. Таким образом, площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.

§ 85. Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если все его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

В правильном многограннике все многогранные углы равны между собой, все двугранные углы равны между собой.

Существует всего пять видов правильных многогранников (рис. 193): правильный тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр*.

Правильный ***тетраэдр*** имеет 4 грани, являющиеся правильными треугольниками, в каждой вершине сходится 3 ребра. Правильный тетраэдр является треугольной пирамидой, у которой все ребра равны.

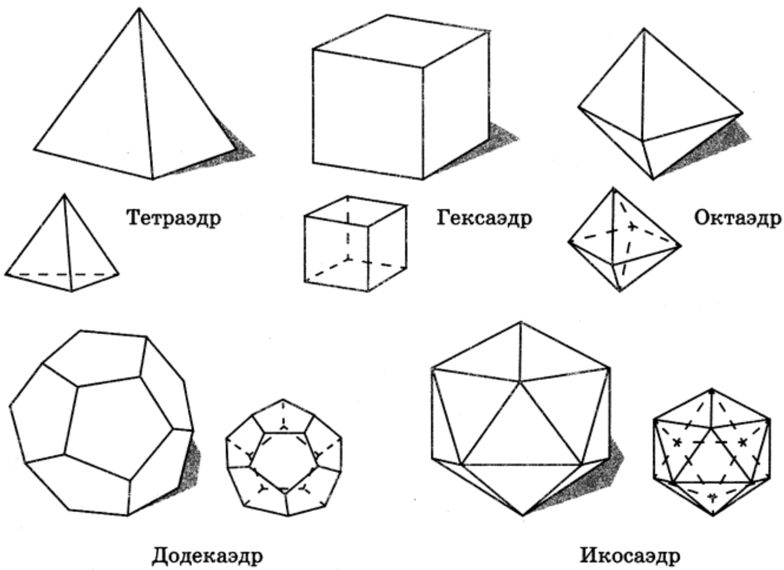


Рис. 193

* Названия правильных многогранников имеют греческое происхождение; буквально они означают: четырех-, шести-, восьми-, двенадцати-, двадцатигранник.

Гексаэдр (куб) имеет 6 граней, являющихся квадратами, в каждой вершине сходится по 3 ребра. Гексаэдр является прямоугольным параллелепипедом с равными ребрами.

Октаэдр имеет 8 граней, являющихся равносторонними треугольниками, в каждой его вершине сходится по 4 ребра.

Додекаэдр имеет 12 граней, являющихся правильными пятиугольниками. В каждой вершине додекаэдра сходится по 3 ребра.

Икосаэдр имеет 20 граней, являющихся равносторонними треугольниками, в каждой его вершине сходится по 5 ребер.

Теоремой Эйлера установлена зависимость между числом вершин любого выпуклого многоугольника **В**, числом его граней **Г** и числом его ребер **Р**: **В** − **Р** + **Г** = 2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие многогранники называются правильными?
2. Сколько существует видов правильных многогранников? Охарактеризуйте их.

ГЛАВА 14. Фигуры вращения и площади их поверхностей

§ 86. Цилиндр

1. Основные понятия. ***Круговым цилиндром*** называется фигура, образованная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 194, *а*).

Пусть прямоугольник $OABC$ вращается вокруг стороны OA, тогда OA — ось вращения — является ***осью цилиндра***, $OC = R$ — ***радиус цилиндра***, CB — ***образующая цилиндра***.

Стороны прямоугольника OC и AB, перпендикулярные оси вращения, при вращении образуют основания цилиндра — круги с центрами в точках O и A и с радиусами R. Образующая цилиндра CB и ось OA являются ***высотой цилиндра*** h.

Образующая цилиндра при вращении образует его ***боковую поверхность***. Вся поверхность цилиндра состоит из боковой поверхности и суммы двух оснований.

Плоскость, проходящая через ось цилиндра, называется ***осевым сечением*** и представляет собой прямоугольник, две стороны которого являются образующими цилиндра, а две другие — диаметрами оснований цилиндра (сечение α на рис. 194, *б*). Цилиндр, осевое сечение которого является квадратом, называется ***равносторонним цилиндром.***

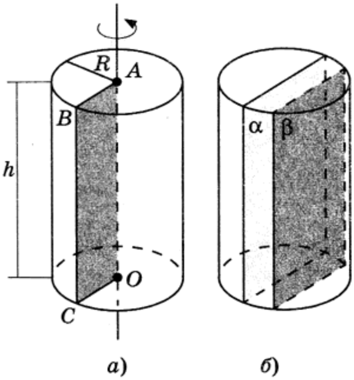


Рис. 194

Сечение стороны плоскостью, параллельной его оси, дает прямоугольник, две стороны которого служат образующими цилиндра, а две другие являются равными между собой хордами окружностей оснований (сечение β на рис. 194, *б*).

Плоскость, параллельная оси цилиндра и отстоящая от нее на расстояние, равное радиусу окружности основания и содержащая в себе одну образующую цилиндра и не имеющая с поверхностью цилиндра других общих точек, называется ***касательной плоскостью.***

Плоскость, проходящая через ось цилиндра и образующую, по которой касательная плоскость касается цилиндра, перпендикулярна к касательной плоскости.

2. Площадь поверхности цилиндра. Если мысленно разрезать боковую поверхность цилиндра по образующей CB и развернуть ее на плоскость, то получится прямоугольник, длина основания которого равна длине окружности основания цилиндра $2\pi R$, а высота — высоте цилиндра h; этот прямоугольник является разверткой цилиндра.

В качестве площади боковой поверхности цилиндра принимается площадь развертки, равная $\boldsymbol{2\pi Rh}$.

Площадь полной поверхности цилиндра S состоит из суммы площадей двух оснований — кругов — и площади боковой поверхности цилиндра, т. е. $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ или

$$\boldsymbol{S = 2\pi R(R + h).}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое тело называется цилиндром?
2. Дайте определения основания, высоты, образующей и боковой поверхности цилиндра.
3. Какое сечение называется осевым сечением цилиндра?

4. Какая плоскость называется касательной плоскостью к цилиндру?
5. Что принимают в качестве площади боковой поверхности цилиндра?
6. Выпишите формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей цилиндра.

§ 87. Конус

1. Основные понятия. ***Круговым конусом*** называется фигура, образованная при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 195).

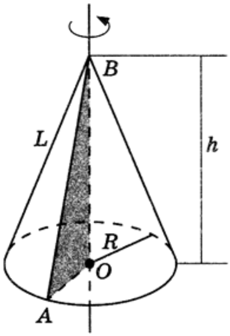


Рис. 195

Пусть прямоугольный треугольник ABO вращается вокруг катета OB, тогда OB — ось вращения — является ***осью конуса***; B — ***вершина конуса***; $OA = R$ — ***радиус основания*** конуса; O — центр круга, лежащего в основании конуса; $AB = L$ — ***образующая*** конической поверхности; $OB = h$ — ***высота*** конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым сечением конуса***.

Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны — образующие конуса, а основание — диаметр основания конуса.

В сечении конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси, образуется окружность.

В сечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину и пересекающей его поверхность, получается равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого служат образующие конуса, а основанием — хорда окружности основания.

Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная к плоскости осевого сечения, проходящей через ту же образующую, не имеет с поверхностью конуса других общих точек, кроме точек этой образующей; она называется ***касательной плоскостью***.

2. Площадь поверхности конуса. Если мысленно разрезать боковую поверхность конуса по образующей AB (рис. 196) и развернуть ее на плоскость, то получим круговой сектор, радиус r которого равен образующей конуса $AB = L$, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса $2\pi R$. Следовательно, площадь боковой поверхности конуса S равна площади развертки боковой поверхности конуса, т. е. площади сектора ABA:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

Здесь α — угол при вершине развертки, r — радиус сектора, $r = L$, $\frac{\pi r \alpha}{180} = l$ — длина дуги сектора.

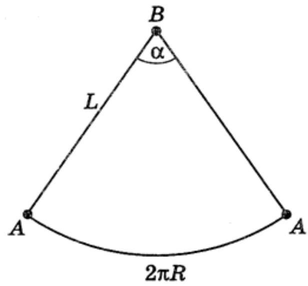


Рис. 196

Тогда $S_{\text{сект}} = l \cdot \frac{r}{2}$. Заменив в этом выражении l на $2\pi R$ и r на L, получим

$$S = S_{\text{сект}} = \pi RL, \qquad (14.1)$$

где R — радиус основания конуса, L — его образующая.

Площадь полной поверхности конуса $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$, где $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, тогда

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + L).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое тело называется конусом?
2. Дайте определения основания, вершины, оси, высоты и образующей конуса.
3. Какое сечение конуса называется осевым?
4. Какая плоскость называется касательной плоскостью к конусу?
5. Что принимается в качестве площади боковой поверхности конуса?
6. Какая фигура лежит в сечении конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси?
7. Выпишите формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса.

§ 88. Усеченный конус

1. Основные понятия. Часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усеченным конусом.

Пусть прямоугольная трапеция AOO_1B (рис. 197) вращается вокруг ее боковой стороны OO_1, перпендикулярной к основанию трапеции AO. Вторая боковая сторона трапеции AB служит образующей усеченного конуса. Две параллельные стороны являются радиусами R и r трапеции. Описываемые ими круги служат ***основаниями*** усеченного конуса.

Ось усеченного конуса OO_1 является его ***высотой*** h.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его ***боковой поверхностью***.

2. Площадь поверхности усеченного конуса. Пусть L — образующая усеченного конуса, x — образующая дополненной части конуса, R — радиус нижнего основания, r — радиус верхнего основания (рис. 198).

По формуле (14.1)

$$S_{бок} = \pi R(L + x) - \pi r x = \pi RL + \pi(R - r)x. \qquad (*)$$

Из подобия треугольников AOP и BO_1P следует:

$$\frac{R}{r} = \frac{L + x}{x}.$$

После преобразований получим

$$\frac{R - r}{r} = \frac{L + x - x}{x} \Rightarrow \frac{R - r}{r} = \frac{L}{x} \Rightarrow x = \frac{Lr}{R - r}.$$

Подставим значение x в (*):

$$S_{бок} = \pi RL + \pi(R - r) \cdot \frac{Lr}{R - r} = \pi RL + \pi rL = \pi(R + r)L$$

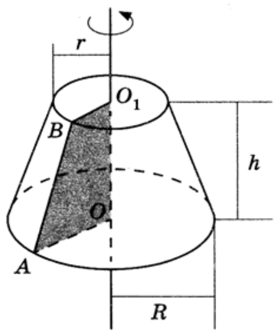


Рис. 197

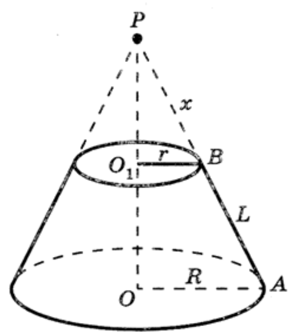


Рис. 198

или

$$S_{бок} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot L. \qquad (14.2)$$

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей основания на образующую.

Полная площадь поверхности усеченного конуса равна

$$S_{полн} = \pi(R + r)L + \pi R^2 + \pi r^2$$

или

$$S_{полн} = \pi(LR + Lr + R^2 + r^2).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какое тело называется усеченным конусом?
2. Дайте определение высоты усеченного конуса.
3. Как вычисляется площадь боковой поверхности усеченного конуса?

§ 89. Сфера и шар

1. Основные понятия. Поверхность, образованная вращением полуокружности вокруг ее диаметра, называется ***сферой*** (рис. 199).

Сфера — это геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки (центра) и образующих поверхность, называемую ***сферой*** или ***шаровой поверхностью***.

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется ***шаром***.

Отрезки прямых, соединяющих центр с точками сферы, называются ***радиусами***. Отрезок прямой, соединяющей две точки сферы, называется ***хордой сферы***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром сферы***.

Приведем без доказательства теорему и следствия из нее.

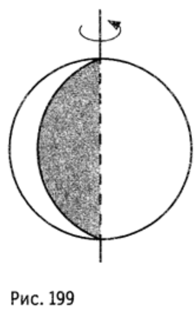


Рис. 199

■ ТЕОРЕМА

Сечение сферы плоскостью есть окружность.

СЛЕДСТВИЯ

I. Если секущая плоскость не проходит через центр сферы, то радиус окружности сечения меньше радиуса сферы.

II. Сечение имеет наибольший радиус, если плоскость сечения проходит через центр сферы. Это сечение называется ***большим кругом сферы***.

III. Плоскость большого круга есть плоскость симметрии сферы.

IV. Радиусы сечений, плоскости которых равноудалены от центра сферы, равны.

2. Касательная плоскость к сфере. Плоскость, имеющая с поверхностью сферы одну общую точку, называется ***касательной плоскостью*** к сфере.

■ ТЕОРЕМА

Плоскость, проходящая через конец радиуса сферы и перпендикулярная к нему, является касательной плоскостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть OA — радиус сферы (рис. 200), $A \in \alpha$, плоскость $\alpha \perp OA$. Пусть произвольная точка $B \in \alpha$. Соединим точку B с центром сферы O. Тогда $OA < OB$ (перпендикуляр короче наклонной), следовательно, точка B лежит вне сферы, таким образом, плоскость α содержит единственную точку A сферы, т. е. является касательной плоскостью.

Прямая, лежащая в касательной плоскости к сфере и проходящая через точки касания, называется ***касательной прямой*** к сфере. Все касательные к сфере, проведенные из данной внешней точки, равны между собой.

Две пересекающиеся сферы по линии их пересечения образуют окружность. Эта окружность лежит в плоскости, перпендикулярной к прямой, соединяющей центры пересекающихся сфер.

3. Части шара и сферы. Часть шара, отсекаемая плоскостью, называется ***шаровым сегментом*** (рис. 201). Часть сферы, отсекаемая плоскостью, называется ***сферическим сегментом***. Площадь сферического сегмента, иначе называемого ***шаровым сводом***, определяется как $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота шарового сектора.

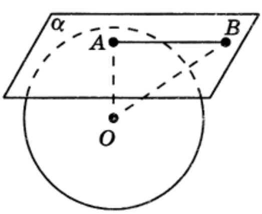


Рис. 200

Часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется ***шаровым слоем*** (рис. 202). Сферическая поверхность шарового слоя называется ***шаровым поясом***. Расстояние между параллельны-

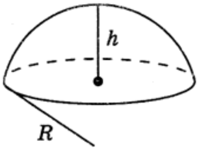


Рис. 201

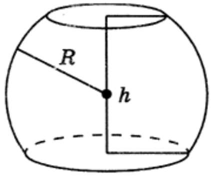


Рис. 202

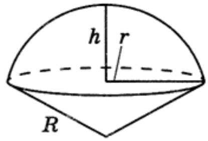


Рис. 203

ми секущими плоскостями h называется высотой шарового слоя. Площадь шарового пояса определяется как $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара.

Часть шара, образованная вращением кругового сектора вокруг оси, проходящей через его центр, называется ***шаровым сектором*** (рис. 203). Шаровой сектор можно рассматривать как сплошную или полую фигуру, в зависимости от этого он называется ***сплошным*** или ***полым***. В качестве высоты шарового сектора h принимают высоту его сферической поверхности (проекцию хорды, стягивающей дугу сектора, на ось вращения). Площадь поверхности шарового сектора определяется как $S = \pi R(2h + r)$, где R — радиус шара, r — радиус основания шарового сегмента, охватывающего шаровой сектор.

Вывод соотношений, определяющих площади сферического сегмента и шарового пояса, будет дан в § 90, п. 4, 5.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определения сферы и шара.
2. Какое сечение называется большим кругом сферы?
3. Какая плоскость называется касательной плоскостью к сфере?
4. Дайте определения шарового сегмента и сферического сегмента.
5. Дайте определения шарового слоя и шарового пояса.
6. Что называется высотой шарового слоя?
7. Дайте определение шарового сектора.
8. Что принимают в качестве высоты шарового сектора?

§ 90. Площадь поверхности сферы и ее частей

1. Дифференциал дуги. Длина дуги. Рассмотрим кривую $y = f(x)$. Найдем длину кривой между двумя ее точками A и B (рис. 204).

Пусть l — переменная длина дуги $\cup AM$, измеряемая от фиксированной точки A кривой до перемещающейся по кривой точки M. Каждому значению абсциссы x соответствует определенное

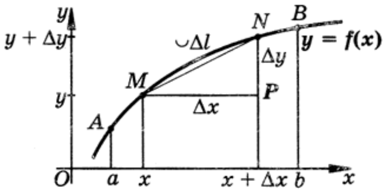


Рис. 204

положение точки M на кривой и, следовательно, определенное значение длины l дуги $\cup AM$, т. е. $l = l(x)$. Пусть дуга $\cup MN$ — это приращение Δl дуги от точки $M(x;\ y)$ до точки $N(x + \Delta x;\quad y + \Delta y)$; здесь Δx и Δy — приращения переменных x и y соответственно.

Из прямоугольного треугольника MNP следует, что

$$(MN)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

откуда

$$\frac{(MN)^2}{\Delta x^2} = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Длина Δl дуги $\cup MN$ эквивалентна длине хорды MN, так как при замене длины дуги $\cup MN$ длиной хорды MN погрешность $\delta \to 0$ $(\delta = \Delta l - MN)$ при $MN \to 0$, поэтому

$$\left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \text{ или } \frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \mathrm{d}x, \qquad (14.3)$$

$\mathrm{d}l$ называется ***дифференциалом дуги***.

Проинтегрируем выражение (14.3) и получим длину дуги между точками A и B с абсциссами a и b соответственно:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ \mathrm{d}x. \qquad (14.4)$$

♦ ПРИМЕР

Найти длину L окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

РЕШЕНИЕ. Продифференцировав уравнение окружности, получим $2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

По формуле (14.4) вычислим длину дуги четверти окружности, выбрав в качестве пределов интегрирования значения 0 и R:

$$l = \int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^R \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}\ \mathrm{d}x = R\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = R(\pi/2).$$

Следовательно, длина L окружности

$$\boldsymbol{L = 4l = 4R(\pi/2) = 2\pi R}.$$

2. Площадь поверхности вращения. Предел, к которому стремится площадь поверхности, образованной вращением ломаной $M_0M_1...M_{n-1}M_n$, вписанной в дугу M_0M_n, при неограниченном увеличении числа ее звеньев, называется площадью поверхности, образованной вращением дуги M_0M_n.

Вычислим площадь поверхности, образованной вращением элемента $\cup AB$ дуги, заданной уравнением $y = f(x)$, вокруг оси Ox (рис. 205). Будем считать функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывными в промежутке $[a;\ b]$, где a и b — абсциссы точек A и B соответственно. Разделим дугу AB на n частей и соединим точки деления хордами, т. е. впишем в дугу ломаную линию. Рассмотрим одну из хорд, ограниченную точками, которые обозначим через $M(x;\ y)$ и $N(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$.

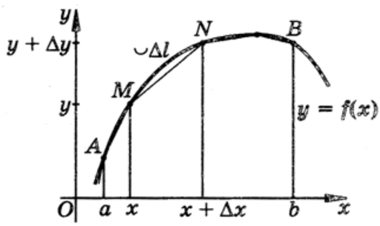


Рис. 205

Найдем приближенные выражения для площади поверхности, образованной участком $\cup MN$ кривой, заменив кривую $y = f(x)$ хордой MN. Площадь поверхности, образованную хордой MN, можно приближенно принять равной площади боковой поверхности усеченного конуса $S_{\text{бок. к}}$, описанного вращением хорды MN. Радиусами основания этого конуса являются ординаты y и $y + \Delta y$, высотой — отрезок Δx и образующей — хорда $MN = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т. е. по (14.2)

$$S_{\text{бок. к}} = \frac{2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pi(2y + \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Вся площадь поверхности, описанной ломаной AB, равна

$$\sum_{x=a}^{b}\pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = \sum_{x=a}^{b}\pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x =$$

$$= \sum_{x=a}^{b}\pi(2y+\Delta y)\cdot\Delta l.$$

Таким образом, площадь S поверхности, образуемой вращением дуги $\cup AB$, является пределом, к которому стремится эта интегральная сумма при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, поэтому

$$S = \lim_{\Delta x \to 0}\sum_{x=a}^{b}\pi(2y+\Delta y)\,\Delta l = 2\pi\int_a^b y\,\mathrm{d}l. \tag{14.5}$$

Выражение (14.5) является формулой для вычисления площади поверхности тела вращения; здесь дифференциал дуги $\mathrm{d}l$ определяется по формуле (14.3). Функция $y = f(x)$ и дифференциал дуги $\mathrm{d}l$ должны быть выражены через одну и ту же переменную.

Площадь, образованная вращением дуги AB вокруг оси Oy, определяется уравнением

$$S = 2\pi\int_p^q x\,\mathrm{d}l, \tag{14.6}$$

где p и q — ординаты точек A и B соответственно.

3. Площадь поверхности сферы. Пусть поверхность сферы образована вращением полуокружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Продифференцируем уравнение окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Найдем дифференциал дуги

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{R}{y}\,\mathrm{d}x.$$

Подставив найденное значение в выражение (14.5), получим

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} y\frac{R\mathrm{d}x}{y} = 2\pi R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R(R+R) = 4\pi R^2.$$

Площадь поверхности сферы равна учетверенной площади большого круга этой сферы:

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2}.$$

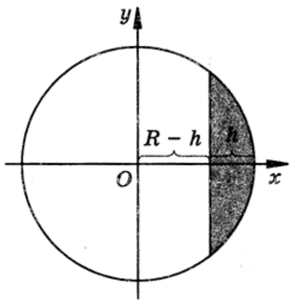


Рис. 206

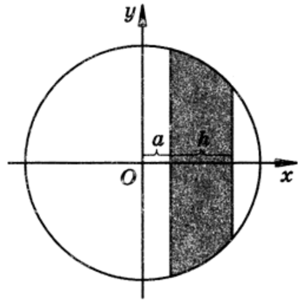


Рис. 207

4. Площадь поверхности сферического сегмента. Пусть сегмент, образованный из сферы радиуса R, имеет высоту h (рис. 206). Как и в предыдущем случае,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,,\ \mathrm{d}l = \frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,,$$

тогда площадь поверхности сферического сегмента S составляет

$$S = 2\pi \int\limits_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi R \int\limits_{R-h}^{R} \mathrm{d}x = 2\pi Rx\,\Big|_{R-h}^{R} =$$
$$= 2\pi R(R - R + h) = \mathbf{2\pi Rh},$$

т. е. площадь поверхности сферического сегмента равна произведению длины окружности большого круга этого сегмента на его высоту.

5. Площадь поверхности сферического пояса. Пусть сферический пояс образован из сферы радиуса R, имеет высоту h и пусть то основание сферического пояса, которое расположено ближе к диаметральному сечению, отстоит от него на отрезок a (рис. 207). Как и в предыдущем случае,

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,,\ \mathrm{d}l = \frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,.$$

Тогда площадь поверхности сферического пояса S составляет

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi R \int\limits_{a}^{a+h} \mathrm{d}x = 2\pi Rx\,\Big|_{a}^{a+b} =$$
$$= 2\pi R(a + h - a) = \mathbf{2\pi Rh},$$

т. е. площадь поверхности сферического пояса равна произведению длины окружности большого круга на высоту пояса.

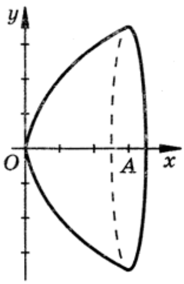


Рис. 208

◆ ПРИМЕР

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 4x$ вокруг оси Ox, ограниченной точками $O(0;\ 0)$ и $A(3;\ 2\sqrt{3})$ (рис. 208).

РЕШЕНИЕ. Преобразуем уравнение параболы: $y = 2x^{1/2}$. Продифференцировав, получим $\frac{dy}{dx} = x^{-1/2}$. По формуле (14.5)

$$S = 2\pi \int_0^3 2x^{1/2} \sqrt{1 + \left(x^{-1/2}\right)^2}\, dx,$$

подведем $x^{1/2}$ под знак корня: $S = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx$. Положим $x + 1 = z$, тогда $dx = dz$, с учетом изменения пределов интегрирования получим

$$S = 4\pi \int_1^4 z^{1/2}\, dz = 4\pi \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{8\pi}{3}(8-1) = \frac{56\pi}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется дифференциалом дуги?
2. По какой формуле вычисляется длина дуги?
3. Как вычислить длину окружности по формуле длины дуги?
4. Как определяется площадь поверхности вращения?
5. Выпишите формулу для вычисления площади поверхности вращения.
6. Вычислите площади поверхности сферы, сферического пояса и сферического сегмента.

ГЛАВА 15. Объемы многогранников и тел вращения

§ 91. Объемы прямых параллелепипедов, призмы и цилиндра

1. Основные понятия. Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется ***объемом*** этого тела. Вычислить объем тела или измерить объем — означает вычислить отношение его к объему, принятому за ***единицу измерения***; за единицу измерения объема принимают объем куба, ребро которого равно единице измерения длины. Такая единица называется ***кубической единицей***.

Основные свойства объемов

I. Объемы равных многогранников равны.

II. Объем многогранника, состоящего из суммы нескольких многогранников, равен сумме их объемов.

Два многогранника, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*. Всякие два равносоставленных многогранника являются равновеликими.

Если один многогранник составляет часть другого, то его объем меньше объема другого многогранника.

2. Объем прямоугольного параллелепипеда. Рассмотрим ситуацию, когда все три измерения a, b, c прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами $a = m$, $b = p$, $c = q$. Тогда плоскостями, параллельными граням, параллелепипед разбивается на mpq единичных кубов, а потому его объем V равен произведению abc:

$$V = abc. \tag{15.1}$$

Пусть все три измерения прямоугольного параллелепипеда выражаются дробными числами:

$$a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{n},\ c = \frac{q}{n},$$

где m, p, q, n — натуральные числа. В этом случае единичный куб разделен на n^3 равновеликих кубов. Объем такого малого куба равен $\frac{1}{n^3}$, а прямоугольный параллелепипед содержит mpq таких малых кубов. Тогда объем параллелепипеда равен сумме объемов этих малых кубов:

$$V = \frac{1}{n^3}mpq = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc.$$

Наконец, рассмотрим общий случай, когда измерения a, b и c выражены любыми действительными числами. Пусть их приближения с недостатком выражаются числами a_1, b_1, c_1, а приближения с избытком — числами a_2, b_2, c_2; объемы параллелепипедов с этими измерениями выражены через V_1 и V_2 соответственно. Это значит, что

$$a_1 < a < a_2, \quad b_1 < b < b_2, \quad c_1 < c < c_2,$$
$$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, \quad V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2, \quad V_1 < V < V_2$$

или

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 < V < a_2 \cdot b_2 \cdot c_2,$$

где

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{10^n}, \quad b_2 = b_1 + \frac{1}{10^n}, \quad c_2 = c_1 + \frac{1}{10^n}.$$

При $n \to \infty$ число $\frac{1}{10^n} \to 0$, поэтому разность $\delta = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 - a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$, $\delta \to 0$, т. е. число V сколь угодно мало отличается от abc или

$$V = abc.$$

Таким образом, какими бы ни были измерения $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $c \in \boldsymbol{R}$, объем прямоугольного параллелепипеда выражается соотношением (15.1).

Следовательно, справедливо и другое соотношение для определения объема прямоугольного параллелепипеда

$$\boldsymbol{V = S \cdot h,} \qquad (15.2)$$

где S — площадь основания ($S = ab$), h — его высота ($h = c$).

3. Объем прямой треугольной призмы. Рассмотрим треугольную призму $\boldsymbol{P}$ (рис. 209). Дополним ее до параллелепипеда, проведя через ребра BB_1 и DD_1 плоскости, параллельные граням AA_1D_1D и AA_1B_1B. Обозначим ребро, по которому они пересекутся, через CC_1, $CC_1 \parallel BB_1$. Призма $\boldsymbol{P}$ равна призме $\tilde{\boldsymbol{P}}$, так как если совместить их равные основания $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, то совместятся и их боковые ребра, равные между собой и перпендикулярные к плоскости основания. Следовательно, объем треугольной призмы $\boldsymbol{P}$ равен половине объема параллелепипеда, т. е.

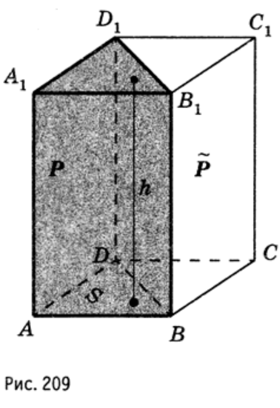


Рис. 209

$$V_P = \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot AA_1 = S_{ABD} \cdot AA_1.$$

Таким образом, объем прямой треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V = S \cdot h. \tag{15.3}$$

4. Объем многоугольной прямой призмы. Пусть P — n-угольная прямая призма с высотой h (рис. 210). Через одно из боковых ребер призмы проведем диагональные плоскости, тогда призма P окажется составленной из $(n-2)$ треугольных призм с той же высотой h; площади их оснований обозначим через $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$.

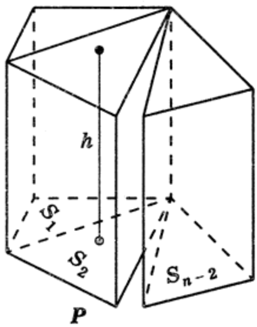


Рис. 210

Объем V прямой призмы P равен сумме объемов всех прямых треугольных призм, т. е.

$$V = S_1h + S_2h + \ldots + S_{n-2}h =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots S_{n-2})h = Sh,$$

здесь $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}$ — площадь основания призмы P, следовательно,

$$V = S \cdot h, \tag{15.4}$$

т. е. объем любой прямоугольной призмы равен произведению площади основания на высоту.

5. Объем прямого кругового цилиндра. В качестве объема цилиндра принимают предел объема правильной вписанной в него или описанной вокруг него призмы при неограниченном увеличении числа ее сторон.

Представим себе цилиндр с радиусом основания R и высотой h. Впишем в цилиндр и опишем вокруг него правильные призмы с n гранями, объемы которых равны V_1 и V_2 соответственно. Очевидно, $V_1 < V < V_2$, где V — объем цилиндра, но $V_1 = S_1h$, $V_2 = S_2h$, где S_1 и S_2 — площади оснований вписанной и описанной призм соответственно, тогда

$$S_1h < V < S_2h. \tag{15.5}$$

Известно, что

$$\lim_{n \to \infty} S_1 = \pi R^2, \ \lim_{n \to \infty} S_2 = \pi R^2.$$

Следовательно, обе части двойного неравенства (15.5) имеют один и тот же предел $\pi R^2 h$, тогда объем цилиндра

$$V = \pi R^2 h. \tag{15.6}$$

Объем прямого кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что называется объемом тела?
2. Как определяется действие вычисления объема тела?
3. Перечислите основные свойства объема тела.
4. Выпишите формулы для определения объема прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы и поясните смысл входящих в них параметров.
5. Можно ли применить формулу объема прямой призмы для вычисления объема прямого параллелепипеда?

§ 92. Объем геометрической фигуры с заданными площадями поперечных сечений

1. Применение интегральной суммы к вычислению объема тела. Объемы фигур с заданными площадями поперечных сечений можно вычислять с применением определенного интеграла.

Пусть геометрическая фигура F заключена между параллельными плоскостями α и β (рис. 211), перпендикулярными оси Ox. Обозначим через a и b ($a < b$) абсциссы пересечения плоскостей α и β с осью Ox. Пусть плоскость γ также перпендикулярна к оси Ox и пересекает ее в точке с абсциссой x, $x \in [a; b]$.

В сечении фигуры F плоскостью γ получаем некоторую фигуру, которую назовем поперечным сечением и обозначим его площадь через $S(x)$. Площадь $S(x)$ задана. Это значит, что любому значению $x \in [a; b]$ соответствует определенная площадь поперечного сечения $S(x)$, иначе говоря, S является функцией переменной x. Предположим, что $S(x)$ непрерывна на $[a; b]$.

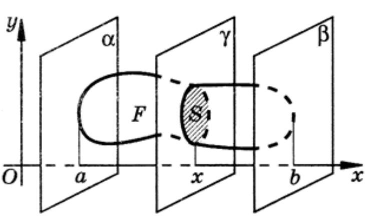


Рис. 211

Для вычисления объема V фигуры F разделим промежуток $[a; b]$ на n частей. Пусть абсциссы точек деления удовлетворяют неравенствам:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n;$$
$$x_0 = a,\ x_n = b.$$

Рассмотрим объем ΔV_k пояса между сечениями с абсциссами

x_k и $x_k + \Delta x_k$. Заменим этот объем объемом прямого цилиндра (призмы), высота которого равна Δx_k, а основание равно $S(x_k)$, тогда этот объем $\Delta V_k = S(x_k) \cdot \Delta x_k$. Объем тела, составленного из n таких цилиндров (призм), выражается интегральной суммой

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k) \cdot \Delta x_k.$$

Объем фигуры из n цилиндров (призм) отличается от объема фигуры F тем меньше, чем меньше промежутки Δx_k. Назовем объемом V фигуры F предел интегральной суммы

$$V = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum S(x_k)\, \Delta x_k.$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum S(x_k)\, \Delta x_k = \int_a^b S(x)\, \mathrm{d}x_k,$$

объем фигуры с заданными площадями поперечных сечений

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)\, \mathrm{d}x_k.} \qquad \textbf{(15.7)}$$

Для призматических или цилиндрических тел функция $S(x)$ является величиной постоянной (если в качестве оси Ox принять прямую, перпендикулярную к основанию), равной площади основания; для других тел, например конических, площадь $S(x)$ изменяется в зависимости от расстояния между сечением и основанием. В этом случае для вычисления объема тела по формуле (15.7) нужно найти зависимость площади сечения $S(x)$ от расстояния между этим сечением и одним из оснований тела. Это основание может быть как плоскостью, так и линией или точкой (например, вершиной конуса или основанием шара).

2. Объем наклонной призмы (наклонного цилиндра). В наклонной призме (цилиндре) с площадью основания S и высотой h площадь сечения $S(x) = S$. Тогда по (15.7) объем V этого тела

$$V = \int_0^h S\, \mathrm{d}x = Sx \Big|_0^h = Sh, \qquad (15.8)$$

т. е. объем наклонной призмы (цилиндра) равен произведению площади его основания на высоту.

Сформулируем другое соотношение для определения объема наклонной призмы (цилиндра).

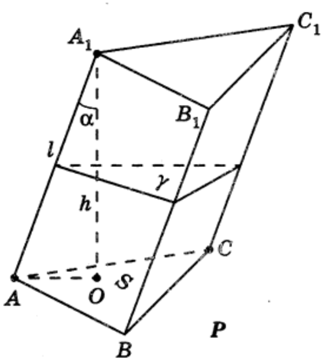


Рис. 212

ТЕОРЕМА

Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — наклонная призма, боковое ребро $AA_1 = l$, q — площадь сечения γ, перпендикулярного ребрам призмы, h — ее высота и S — площадь основания призмы (рис. 212). Пусть высота призмы h образует с боковым ребром AA_1 угол α, тогда угол между плоскостью основания и плоскостью γ также равен α.

Из треугольника AA_1O находим высоту $h = l \cos \alpha$. Поскольку q — это проекция треугольника основания ABC на плоскость γ, площадь $q = S \cos \alpha$, из чего следует: $S = q/\cos \alpha$. Подставим в (15.8) значения h и S, получим $V = (q/\cos \alpha)\, l \cos \alpha$, т. е.

$$V = ql, \tag{15.9}$$

что и требовалось доказать.

3. Объем пирамиды. В пирамиде площади основания S и параллельных ему сечений $S(x)$ относятся как квадраты их расстояний от вершины (§ 83, п. 2). Примем в качестве оси Ox в пирамиде прямую, перпендикулярную к основанию, с началом в вершине пирамиды, таким образом, пределы интегрирования в (15.7) равны $a = 0$, $b = h$. Таким образом,

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$$

или

$$S(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Тогда объем пирамиды V равен

$$V = \int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh.$$

Таким образом, объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}Sh. \tag{15.10}$$

4. Объем усеченной пирамиды. Представим себе усеченную пирамиду с площадями нижнего и верхнего основания, равными $S_н$ и $S_в$ соответственно и высотой h. Пусть высота полной пирамиды, образованной продолжением ребер усеченной до их пересечения в одной точке, равна $h + H$.

Объем усеченной пирамиды V равен разности между объемом полной пирамиды и объемом пирамиды, дополняющей усеченную до полной:

$$V = \frac{1}{3}S_н(H + h) - \frac{1}{3}S_в h. \qquad (*)$$

По свойству параллельных сечений в пирамиде

$$\frac{S_н}{S_в} = \frac{(h + H)^2}{H^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_н}}{\sqrt{S_в}} = \frac{h + H}{H}.$$

Преобразуя пропорцию, получим

$$\frac{\sqrt{S_н} - \sqrt{S_в}}{\sqrt{S_в}} = \frac{h + H - H}{H}; \ \frac{\sqrt{S_н} - \sqrt{S_в}}{\sqrt{S_в}} = \frac{h}{H}.$$

Отсюда

$$H = \frac{h\sqrt{S_в}}{\sqrt{S_н} - \sqrt{S_в}}. \qquad (**)$$

Подставив (**) в (*) и упростив, приходим к формуле

$$\boldsymbol{V = \frac{h}{3}(S_н + S_в + \sqrt{S_н S_в}).} \qquad (15.11)$$

5. Объем тела вращения. Пусть фигура, ограниченная линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Ox (рис. 213). Найдем объем V полученного тела вращения F.

Сечение тела F плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, является кругом с радиусом $y = f(x)$, т. е. площадь этого сечения $S(x) = \pi y^2$, тогда по (15.7)

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b y^2\, dx.} \qquad (15.12)$$

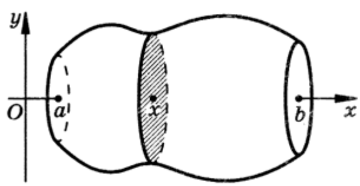


Рис. 213

Если же фигура, ограниченная линиями $x = f(y)$, $y = p$, $y = q$ и $x = 0$, вращается вокруг оси Oy, то объем V полученного тела вращения определяется выражением

$$V = \pi \int_p^q x^2\, \mathrm{d}y. \qquad (15.13)$$

6. Объем конуса. Пусть конус, полученный в результате вращения прямоугольного треугольника OBA вокруг оси Ox (рис. 214), имеет радиус основания R и высоту h. Составим уравнение образующей OA:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h} x,$$

где α — угол между осью конуса и его образующей.

По (15.12) объем V конуса составляет

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2}\, x^2\, \mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2\, \mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

т. е. объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \qquad (15.14)$$

7. Объем усеченного конуса. Пусть усеченный конус, образованный вращением прямоугольной трапеции $OABC$ вокруг оси Ox, имеет радиусы большего и меньшего оснований R и r соответственно и высоту h (рис. 215). Уравнение образующей AB этого конуса имеет вид $y = kx + b$, здесь угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha\, (R - r)/h$, α — угол между осью конуса и его образующей, b — ордината образующей в точке $x = 0$, $b = r$. Тогда уравнение образующей имеет вид

$$y = \frac{R - r}{h} x + r.$$

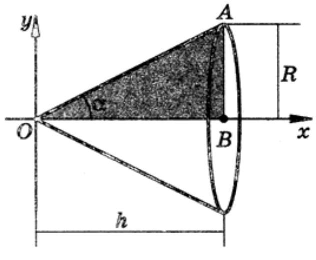


Рис. 214

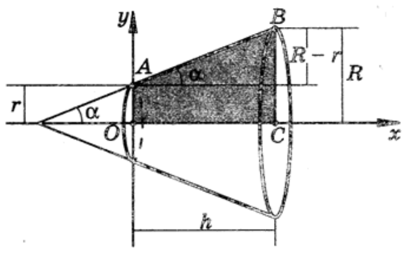


Рис. 215

По (15.12) объем V усеченного конуса

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R - r}{h} x + r\right)^2 \mathrm{d}x.$$

При интегрировании применим подстановку

$$\frac{R - r}{h} x + r = u, \ \ \frac{R - r}{h} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u.$$

Находим новые пределы интегрирования:

$$u_0 = r, u_1 = R.$$

Таким образом,

$$V = \pi \int_r^R u_2 \frac{h}{R - r} \mathrm{d}u = \frac{\pi h}{R - r} \int_r^R u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{\pi h}{R - r} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_r^R = \frac{\pi h}{3(R - r)} (R^3 - r^3)$$

или

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).} \qquad (15.15)$$

8. Объем шара. Пусть образующей шара является полуокружность с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, тогда $y^2 = R^2 - x^2$. Объем v половины шара составляет

$$v = \pi \int_0^R (R^2 - x^2) \,\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi R^3,$$

тогда объем V шара

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \pi R^3.} \qquad (15.16)$$

Можно также выразить объем шара через диаметр $D = 2R$:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6} \pi D^3.} \qquad (15.17)$$

9. Объем шарового сегмента. Пусть шаровой сегмент, образованный вращением половины кругового сегмента ABC шара с радиусом R вокруг оси Ox, имеет высоту h (рис. 216). Тогда по (15.12) его объем V равен

$$V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) \,\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-h}^R = \pi\left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2(R - h) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(R - h)^3}{3}\right)\right] = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^3 + R^2 h + \frac{R^3}{3} - R^2 h + R h^2 - \frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(R h^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

или

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right). \qquad (15.18)$$

10. Объем шарового слоя. Рассмотрим шаровой слой, образованный вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox (рис. 217). Таким образом, a и b — расстояния от центра шара до секущих плоскостей, R — радиус шара; высоту шарового слоя обозначим через $h = b - a$. По (15.12) объем V шарового слоя равен

$$V = \pi \int\limits_a^b (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b = \pi\left(R^2b - \frac{b^3}{3} - R^2a + \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(R^2(b-a) - \frac{b^3 - a^3}{3}\right) = \pi\left(R^2(b-a) - \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(R^2h - \frac{h(b^2 + ab + a^2)}{3}\right)$$

или

$$V = \pi R^2h - \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2). \qquad (15.19)$$

Если шаровой слой задан радиусами оснований шарового слоя r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$) и высотой слоя h, то его объем может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 2r_2^2 + h^2) \qquad (15.20)$$

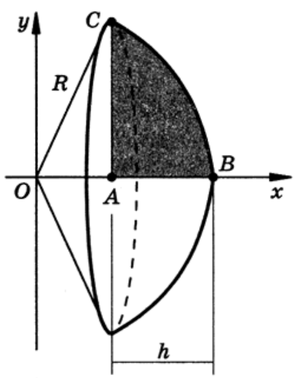


Рис. 216

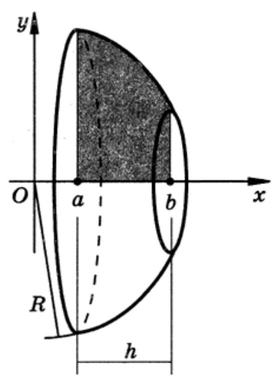


Рис. 217

или

$$V = \frac{1}{2}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2)h + \frac{1}{6}\pi h^3. \qquad (15.21)$$

11. Объем шарового сектора. Пусть шаровой сектор образован вращением кругового сектора OAB вокруг оси Ox (рис. 218). Его объем можно представить себе как сумму объемов конуса OBC и шарового сегмента CBA. Обозначим радиус шара через $\tilde{R}$ и высоту шарового сегмента через $\tilde{h}$.

Обозначим точку проекции точек B и C на ось Ox через D. Тогда (из треугольника ODB) квадрат радиуса основания конуса R составляет

$$R^2 = \tilde{R}^2 - (\tilde{R} - \tilde{h})^2 = 2\tilde{R}\tilde{h} - \tilde{h}^2.$$

По формулам (15.14) и (15.18) объем V шарового сектора равен

$$V = \frac{1}{3}\pi(2\tilde{R}\tilde{h} - \tilde{h}^2)(\tilde{R} - \tilde{h}) + \pi\tilde{h}^2\left(\tilde{R} - \frac{\tilde{h}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}(2\tilde{R}^2\tilde{h} - 2\tilde{R}\tilde{h}^2 - \tilde{R}\tilde{h}^2 + h^3 + 3\tilde{R}\tilde{h}^2 - \tilde{h}^3) = \frac{2}{3}\pi\tilde{R}^2\tilde{h}$$

или, если отбросить знак тильды, объем шарового сектора с радиусом R и высотой h равен

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \qquad (15.22)$$

12. Объемы других тел вращения. Приведем примеры вычисления объемов тел, образованных вращением различных кривых.

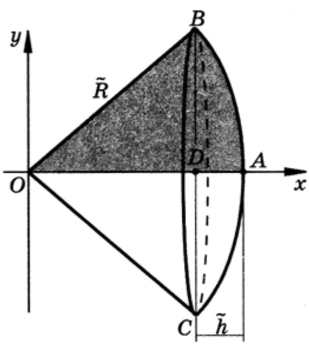


Рис. 218

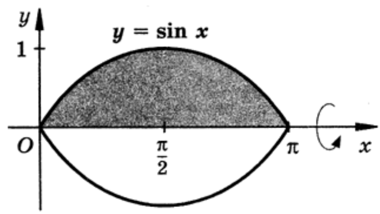


Рис. 219

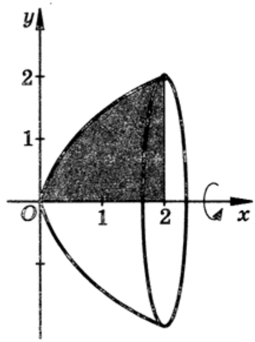


Рис. 220

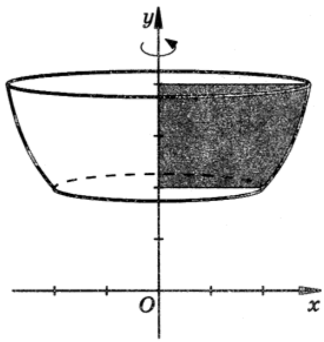


Рис. 221

I. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y = \sin x$ на промежутке $x \in [\,0; \pi]$ и осью Ox (рис. 219).

По формуле (15.12)

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} \text{ (куб. ед.)}.$$

II. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$ (рис. 220). Такая фигура называется ***параболоидом вращения.***

По формуле (15.12)

$$V = \pi \int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = \pi x^2\Big|_0^2 = 4\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

III. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2$, $y = 4$ и $x = 0$ (рис. 221).

По формуле (15.13)

$$V = \pi \int_2^4 2y\,\mathrm{d}y = \pi y^2\Big|_2^4 = 12\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

IV. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной полуэллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осью Ox (рис. 222). Такое тело вращения называется ***эллипсоидом.***

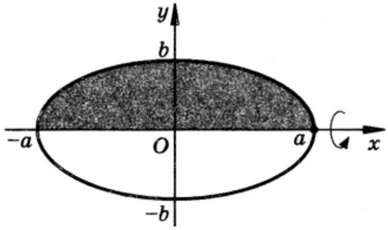


Рис. 222

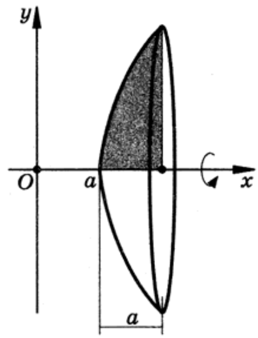


Рис. 223

Из уравнения эллипса следует, что

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Фигура симметрична относительно оси Oy, поэтому вычислим объем половины фигуры v:

$$v = \pi \int_0^a \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Объем всего эллипсоида составляет

$$V = 2v = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

V. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и прямыми $y = 0$, $x = 2a$ (рис. 223). Такое тело вращения называется ***гиперболоидом.***

Из уравнения гиперболы следует, что

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - b^2).$$

Тогда по формуле (15.12)

$$V = \pi \int_a^{2a} \left(\frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{b^2x^3}{3a^2} - \frac{b^4}{a^2}x\right)\Bigg|_a^{2a} = \pi\left[\left(\frac{8ab^2}{3} - \frac{4b^4}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2a}{3} - \frac{b^4}{a}\right)\right] = \pi\left(7\frac{ab^2}{3} - 3\frac{b^4}{a}\right)\text{(куб. ед.)}.$$

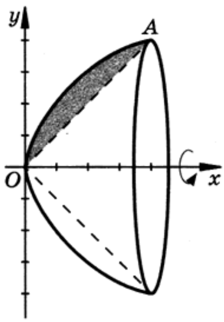


Рис. 224

VI. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площадки, ограниченной линиями $y^2 = 4x$ и $y = x$ (рис. 224).

Решив систему

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x, \end{cases}$$

находим точки пересечения параболы и прямой: $O(0; 0)$ и $A(4; 4)$. Таким образом определяем пределы интегрирования: $x = 0$ и $x = 4$. Объем тела вращения представляет собой разность объемов параболоида, образованного вращением кривой $y^2 = 4x$ и конуса, образованного вращением прямой $y = x$. Тогда

$$V = \pi \int_0^4 4x\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = \pi\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \pi\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните, как используется формула для вычисления объема тела по площади его поперечного сечения.
2. Как вычисляется объем наклонной призмы?
3. Выведите формулу объема пирамиды.
4. Выведите формулу объема усеченной пирамиды.
5. Как вычисляется объем тела вращения?
6. Выведите формулу объема полного и усеченного конусов.
7. Выведите формулу объема шара.
8. Выведите формулы объема шарового сегмента и шарового слоя.

ЧАСТЬ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ГЛАВА 16. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

§ 93. Элементы комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются **соединениями.**

Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

1. Размещения. Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их следования.

Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(m-1)). \qquad (16.1)$$

2. Перестановки. Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n. Перестановки представляют собой частный случай размещения из n элементов по n в каждом, т. е.

$$P_n = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1. \qquad (16.2)$$

Таким образом, число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно. Произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ первых натуральных чисел обозначается знаком $n!$ (читается «n-факториал»), причем формально полагают $0! = 1$, $1! = 1$. Поэтому равенство (16.2) можно записать в виде

$$P_n = n! \tag{16.3}$$

С использованием формулы (16.3) выражению (16.1) можно придать вид

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \tag{16.4}$$

При решении задач удобно использовать очевидное равенство

$$A_n^{m+1} = (n-m)\,A_n^m. \tag{16.5}$$

3. Сочетания. Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}\,, \tag{16.6}$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{16.7}$$

или

$$C_n^m = \frac{n\times(n+1)\times\ldots\times(n-(m-1))}{m!}\,. \tag{16.8}$$

По определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^o = 1$. Кроме того, при решении задач используются формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{16.9}$$

$$C_n^m = C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}\,. \tag{16.10}$$

♦ ПРИМЕР 1

Найти число размещений: 1) из 10 элементов по 4; 2) из $n + 4$ элементов по $n - 2$.

РЕШЕНИЕ. Согласно формуле (16.1) получим

1) $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$;

2) $A_{n+4}^{n-2} = (n+4)\times(n+3)\times\ldots\times(n+4-(n-2-1)) = (n+4)\times$ $\times(n+3)\times\ldots\times 8\times 7$.

♦ ПРИМЕР 2

Решить уравнение $A_n^5 = 30\ A_{(n-2)}^4$.

РЕШЕНИЕ. **Используя формулу (16.1), перепишем уравнение в виде**

$$n\,(n-1)\,\ldots\,(n-4) = 30\,(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Учитывая, что $n \geqslant 6$, разделим обе части на $(n-2)(n-3)(n-4)$; имеем $n(n-1) = 30(n-5)$, отсюда $n_1 = 6$, $n_2 = 25$.

♦ ПРИМЕР 3

Составить все возможные перестановки из элементов: 1) 1; 2) 5, 6; 3) a, b, c.

РЕШЕНИЕ. **1) (1) : $P_1 = 1$;**

2) (5, 6), (6, 5) : $P_1 = 1 \cdot 2 = 2$;

3) (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a); $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

♦ ПРИМЕР 4

Вычислить значения выражений: 1) 5! + 6!; 2) $\frac{52!}{50!}$; 3) C_{15}^{13}; 4) $C_6^4 + C_5^0$.

РЕШЕНИЕ. **1) $5! + 6! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 720 = 840$;**

2) $\frac{52!}{50!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50!} = 52 \cdot 51 = 2652$;

3) по формуле (16.7) получим

$$C_{15}^{13} = \frac{15!}{13!(15-13)} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 = 105;$$

$$C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие соединения называются размещениями?
2. Выпишите формулу для числа размещений из *n* элементов по *m*.
3. Какие соединения называются перестановками?
4. Выпишите формулу для числа перестановок из *n* элементов.
5. Какие соединения называются сочетаниями?
6. Выпишите формулу для числа сочетаний из *n* элементов по *m*.

§ 94. Элементы теории вероятностей

1. Случайные события, вероятность события. Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется ***событием***.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, — невозможным.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т. е.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}.} \qquad (16.11)$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному — вероятность $P(A) = 1$.

♦ ПРИМЕР 1

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

РЕШЕНИЕ. Общее число различных исходов есть $n = 1000$. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m = 200$. Согласно формуле (16.11), получим $P(A) = 200/1000 = 1/5 = 0{,}2$.

♦ ПРИМЕР 2

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

РЕШЕНИЕ. Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через A. Общее число случаев $n = 5 + 3 = 8$. Число случаев m, благоприятствующих появлению события A, равно 3. По формуле (16.11) получим $P(A) = m/n = 3/8 = 0{,}375$.

♦ ПРИМЕР 3

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

РЕШЕНИЕ. Обозначим событие, состоящее в появлении двух черных шаров, через A. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из $(12 + 8)$ элементов по два. Тогда

$$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет

$$m = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

По формуле (16.11) находим вероятность появления двух черных шаров $P(A) = m/n = 28/190 = 14/95 = 0{,}147$.

♦ ПРИМЕР 4

В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

РЕШЕНИЕ. Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5, т. е.

$$C_{18}^5 + \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию A. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно

$$C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число m комбинаций составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = 2184/8568 = 0{,}255.$$

2. Теоремы сложения вероятностей. Приведем из без доказательств.

■ ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Вероятность одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B); \qquad (16.12)$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k). \qquad (16.13)$$

■ ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Вероятность появлениях хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (16.14)$$

Для трех совместных событий имеет место формула

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \qquad (16.15)$$

Событие, противоположное событию A (т. е. ненаступление события A), обозначают через $\bar{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (16.16)$$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется **условной**

вероятностью события A при условии B и обозначается через $P_B(A)$ или $P(A/B)$*. Если A и B — независимые события, то

$$P(B) - P(B/A) = P(B/\bar{A}). \qquad (16.17)$$

События A, B, C, ... называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

♦ ПРИМЕР 1

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

РЕШЕНИЕ. I СПОСОБ. Очевидно, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B — одна деталь стандартная, две нестандартные; C — две детали стандартные, одна нестандартная и D — три детали стандартные.

Таким образом, событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A = B + C + D$. По теореме сложения имеем $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$. Находим вероятность каждого из этих событий (см. задачу 4, п. 1):

$$P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{35}{76};$$

$$P(C) = \frac{C_3^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38};$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}.$$

Сложив найденные величины, получим

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0{,}601.$$

II СПОСОБ. События A (хотя бы одна из трех взятых деталей оказалась стандартной) и $\bar{A}$ (ни одна из взятых деталей не оказалась стандартной) являются противоположными; поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ или $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

* Читается *P от A при условии B*.

Вероятность появления события $\bar{A}$ составляет

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{91}{228}.$$

Следовательно, искомая вероятность есть $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 91/228 = 137/228 = 0{,}601$.

♦ ПРИМЕР 2

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

РЕШЕНИЕ. Пусть A — событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B — в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A + B)$. Так как A и B — совместные события, то воспользуемся формулой (16.14):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11,..., 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события A); 18 кратными 5 (благоприятствуют наступлению события B) и 6 — кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события AB). Таким образом, $P(A) = 30/90 = 1/3$, $P(B) = 18/90 = 1/5$, $P(AB) = 6/90 = 1/15$, т. е. $P(A + B) = 1/3 + 1/5 - 1/15 = 7/15 = 0{,}467$.

3. Теоремы умножения вероятностей. Приведем их также без доказательств.

■ ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Вероятность совместного появления (или произведения) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{16.18}$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \tag{16.19}$$

■ ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Вероятность совместного появления (или произведения) двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго при условии первого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{16.20}$$

♦ ПРИМЕР 1

В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой — 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

РЕШЕНИЕ. Пусть A — появление белого шара из первой урны, а B — появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события A и B независимы. Найдем $P(A) = 4/12 = 1/3$, $P(B) = 3/12 = 1/4$. По формуле (16.20) получим $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = (1/3) \cdot (1/4) = 1/12 = 0{,}083$.

♦ ПРИМЕР 2

В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

РЕШЕНИЕ. Введем следующие обозначения: A — первая взятая деталь стандартная; B — вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет $P(A) = 8/12 = 2/3$. Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т. е. вероятность события B при условии A равна $P(B/A) = 7/11$.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot (B/A) = (2/3) \cdot (7/11) = 14/33 = 0{,}424.$$

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса*. Пусть события (гипотезы) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например B_i, событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P(A/B_i)$. Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + \\ + P(B_n) \cdot P(A/B_n). \quad (16.21)$$

Здесь $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$. Формула (16.21) называется ***формулой полной вероятности***.

---

* *Байес Томас* (*Bayes Thomas*, 1702—1761) — английский математик и философ.

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле вероятности гипотез

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \tag{16.22}$$

которая носит также название формулы Байеса. Здесь $P(B_i/A)$ — вероятность каждой из гипотез после испытания, в результате которого наступило событие A; $P(A/B_i)$ — условная вероятность события A после наступления события B_i, а $P(A)$ находится по формуле полной вероятности (16.21).

♦ ПРИМЕР 1

На склад поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором — 35% и на третьем 25%, причем на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором — 80% и на третьем — 70%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

РЕШЕНИЕ. Введем следующие обозначения: B_1 — деталь изготовлена на первом станке, B_2 — на втором станке и B_3 — на третьем станке; событие A — деталь оказалась первого сорта. Из условия следует, что $P(B_1) = 0{,}4$, $P(B_2) = 0{,}35$, $P(B_3) = 0{,}25$, $P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}8$ и $P(A/B_3) = 0{,}7$ Следовательно,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}815.$$

♦ ПРИМЕР 2

В первом ящике имеются 8 белых и 6 черных шаров, а во втором — 10 белых и 4 черных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар — черный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

РЕШЕНИЕ. Введем обозначения: B_1 — был выбран первый ящик; B_2 — был выбран второй ящик; A — при проведении двух последовательных испытаний выбора ящика и выбора шара был вынут черный шар. Тогда $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/2$. Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран первый ящик, составляет $P(A/B_1) =$

$= 6/14 = 3/7$. Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран второй ящик, равна $P(A/B_2) = 4/14 = 2/7$.

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что вынутый шар оказался черным:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) =$$
$$= (1/2) \cdot (3/7) + (1/2) \cdot (2/7) = 5/14.$$

Искомая вероятность того, что черный шар был вынут из первого ящика, вычисляется по формуле Байеса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{(1/2) \cdot (3/7)}{5/14} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

5. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются ***независимыми относительно события A***.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p (где $0 < p < 1$), событие A наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (16.22)$$

где $q = 1 - p$.

♦ ПРИМЕР

Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет $p = 0{,}8$. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах.

РЕШЕНИЕ. Здесь $n = 6$, $k = 4$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. По формуле Бернулли находим

$$P_6(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}2)^{6-4} =$$
$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}246.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие случайные события называются достоверными и какие невозможными?
2. Какие события называются несовместными?

3. Какие события называются совместными?
4. Какие события называются противоположными?
5. Дайте классическое определение вероятности.
6. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
7. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных событий.
8. Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?
9. Что называется условной вероятностью события?
10. Какие события в совокупности называются независимыми?
11. Сформулируйте теорему умножения вероятностей независимых событий.
12. Сформулируйте теорему умножения вероятностей зависимых событий.

ГЛАВА 17. Элементы математической статистики

§ 95. Основные задачи и понятия

1. Задачи математической статистики*. Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных — результатах наблюдений. Первая задача математической статистики — указать способы сбора и группировки (если данных очень много) статистических сведений.

Вторая задача математической статистики — разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

Изучение тех или иных явлений методами математической статистики служит средством решения многих вопросов, выдвигаемых наукой и практикой (правильная организация технологического процесса, наиболее целесообразное планирование и др.).

Итак, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

2. Генеральная и выборочная совокупности. Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого *ка-*

* Термин «статистика» происходит от латинского слова *status* — состояние.

чественного или ***количественного признака***, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обследуют ***каждый*** из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяется сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование физически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто ***выборкой*** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Однако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений или для облегчения теоретических выводов допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправдывается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (достаточно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

3. Выборка с возвращением и без возвращения. Репрезентативная выборка. При составлении выборки можно поступать двояко: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть либо возвращен, либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на выборки с возвращением и без возвращения.

Выборкой с возвращением называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Выборкой без возвращения называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются выборкой без возвращения.

Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем нас признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между выборкой с возвращением и без возвращения стирается; в предельном случае, когда рассматривается бесконечная генеральная совокупность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.

4. Способы отбора. На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида.

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части, к нему относятся:

а) простой случайный бесповторный отбор;

б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части, к нему относятся:

а) типический отбор;

б) механический отбор;

в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают и наугад вынимают одну карточку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточка возвращается в пачку и процесс повторяется, т. е. карточки перемешиваются, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают n раз; в итоге получают простую случайную выборку с возвращением объема n.

Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка будет простой случайной без возвращения.

При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают подряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если окажется, что случайное число таблицы превышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении выборки без возвращения случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральная совокупность «механически» делится на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, и из каждой группы отбирается один объект.

Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь и т. д.

Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирается каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затупленными резцами. В таком случае надо устранить совпадение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двадцати обточенных.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», подвергающимися сплошному обследованию. Например, если изделия изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы.

Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

§ 96. Статистическое распределение выборки

1. Основные понятия. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, x_k наблюдалось n_k раз и $\sum n_i = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, — вариационным рядом. Числа наблюдений называют ***частотами***, а их отношения к объему выборки $n_1/n = W_i$ — ***относительными частотами***.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под ***распределением*** понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

♦ ПРИМЕР

Составить распределение относительных частот, если задано распределение частот выборки объема $n = 20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

РЕШЕНИЕ. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50; \quad W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Составим распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

Сумма относительных частот составляет $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

2. Эмпирическая функция распределения. Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x — число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака меньше x, n — общее число наблюдений (объем выборки).

Относительная частота события $X < x$ равна n_x/n. Если x будет изменяться, то, вообще говоря, будет изменяться и относительная частота, т. е. относительная частота n_x/n есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Итак, по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант, меньших x, n — объем выборки.

Таким образом, для того чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2) = \frac{n_{x_2}}{n}.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки интегральную функцию $F(x)$ распределения генеральной совокупности называют ***теоретической функцией распределения***. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X < x$, т. е. $F^*(x)$ стремится по вероятности к вероятности $F(x)$ этого события. Другими словами, числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого. Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Действительно, из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0, 1];
2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;
3) если x_1 — наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$;
   если x_k — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

♦ ПРИМЕР

Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

варианты x_i	2	6	10
частоты n_i	12	18	30

РЕШЕНИЕ. Найдем объем выборки: $12 + 18 + 30 = 60$. Наименьшая варианта равна 2, следовательно, при $x \leqslant 2$

$$F^*(x) = 0.$$

Значение $X < 6$, а именно $x_1 = 2$ наблюдалось 12 раз; следовательно, при $2 < x \leqslant 6$

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2.$$

Значения $X < 10$, а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ наблюдались $12 + 18 = 30$ раз; следовательно, при $6 < x \leqslant 10$

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

Так как $x = 10$ — наибольшая варианта, то при $x > 10$

$$F^*(x) = 1.$$

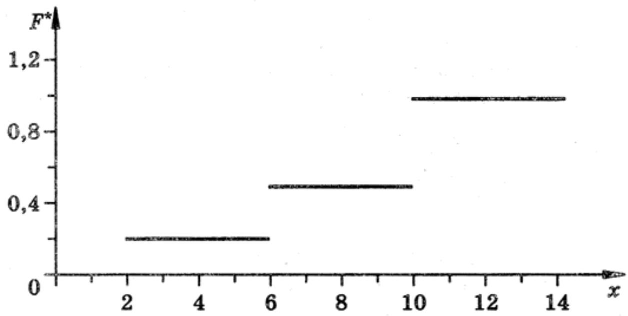


Рис. 225

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 0{,}2 \text{ при } 2 < x \leqslant 6, \\ 0{,}5 \text{ при } 6 < x \leqslant 10, \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 225.

3. Полигон и гистограмма. В целях наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, W_1), (x_2, W_2), ..., (x_k, W_k). Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат соответствующие им относительные частоты W_i. Точки (x_i, W_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рисунке 226 изображен полигон относительных частот следующего распределения:

X	1,5	3,5	5,5	7,5
W	0,1	0,2	0,4	0,3

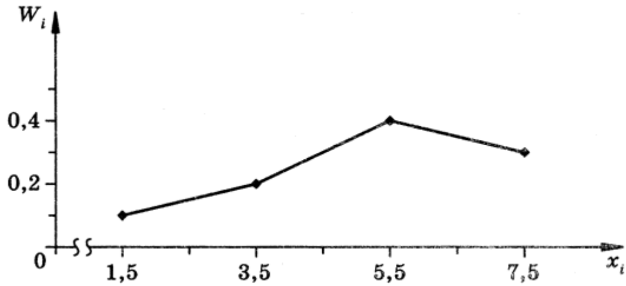


Рис. 226

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

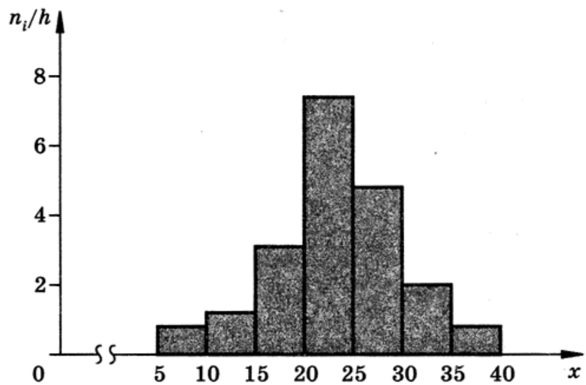


Рис. 227

Площадь i-го прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ — сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, ***площадь гистограммы частот равна*** сумме всех частот, т. е. ***объему выборки.***

На рисунке 227 изображена гистограмма частот распределения объема $n = 100$, приведенного в таблице 6.

Таблица 6

Частичный интервал длиной $h = 5$	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i/h. Площадь i-го прямоугольника равна $h \cdot \frac{W_i}{h} = W_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, ***площадь гистограммы относительных частот равна*** сумме всех относительных частот, т. е. ***единице.***

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. В чем заключается задача математической статистики?
2. Что называется выборкой?
3. Дайте определения генеральной совокупности и объема совокупности.
4. Как различаются выборка с возвращением и выборка без возвращения?
5. Охарактеризуйте возможные способы выбора.
6. Дайте определение эмпирической функции распределения.
7. Что называется полигоном частот и гистограммой частот?

Оглавление

Учебное издание

Богомолов Николай Васильевич
Самойленко Петр Иванович

МАТЕМАТИКА

Зав. редакцией *Т. Д. Гамбурцева*
Редактор *Е. А. Вольмир*
Художественное оформление *А. А. Абрамова*
Технический редактор *Н. И. Герасимова*
Компьютерная верстка *Т. В. Рыбина*
Корректор *Н. С. Соболева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.010105.09.08 от 22.09.2008.

Подписано к печати 12.02.10. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,0. Тираж 6000 экз. Заказ № 9664.

ООО «Дрофа».
127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».
Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано с предоставленных диапозитивов
в ОАО «Тульская типография». 300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.