Смоленский промышленно-экономический колледж

# **И. А Ромашкова**

**Тезисы лекций**

**по дисциплине:**

**«ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»**

**«МАТЕМАТИКА»**

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**Глава I. Элементы линейной алгебры**

Тема 1. Основные сведения о матрицах 3

Тема 2. Определители квадратных матриц 4

Тема 3. Системы линейных уравнений 6

**Глава I I. Элементы аналитической геометрии**

Тема 4. Вектор. Действия над векторами 7

Тема 5. Линии на плоскости 9

Тема 6. Линии второго порядка 13

**Глава I II. Введение в анализ**

Тема 7. Элементы теории множеств. Функции 15

Тема 8. Основные понятия теории пределов числовых последовательностей 19

Тема 9. Основные понятия теории пределов функций 20

Тема 10. Непрерывность функции 21

**Глава IV. Дифференциальное исчисление**

Тема 11. Производная функции 24

Тема 12. Приложения производной. 26

**Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

**Тема 1.** **«ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ »**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Матрица. Элементы матрицы

Виды матриц

Действия над матрицами

Свойства операций над матрицами

Элементарные преобразования матриц

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |  |
| --- | --- |
| ***Матрицей*** *размера m* x *n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m и n столбцов. Числа составляющие матрицу являются ее* ***элементами****.* | А = |

*Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется к****вадратной*.**

*Элементы квадратной матрицы, стоящей на диагонали, идущей из левого верхнего угла, образуют* ***главную диагональ****.*

*Диагональная матрица, у которой каждой элемент главной диагонали, равен единице, называется* ***единичной****. Матрица, содержащая только элементы равные нулю, называется* ***нулевой.***

В матричном исчислении матрицы О и Е играют роль чисел 0 и 1.

*Матрица, содержащая один столбец, называется* ***вектором*** *или* ***матрица - столбец***

***Суммой двух матриц***  *Аmxn + Вmxn  называется матрица Сm x n , элементы которой находятся по формуле сij = аij  + bij.*

***Умножение матриц*** (выполняется, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй). Получения элемента *сij* схематично изображается так:

**

***Транспонирование матрицы***- переход от матрицы А к матрице А′, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

**Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определение матрицы.
2. Как обозначается матрица и ее элементы?
3. Что называют главной диагональю матрицы?
4. Какие виды матриц вы знаете? Приведите примеры.
5. При каких условиях выполняется операция сложения для матриц?
6. Какая матрица называется противоположной к данной?
7. Что называется произведением двух матриц?
8. При каком условии выполняется умножение двух матриц?
9. Какие преобразования относятся к элементарным преобразованиям матриц?
10. Дайте определение транспортированной матрицы.

Тема 2. «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядка

Основные свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения

Обратная матрица

Ранг матрицы

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Любой квадратной матрице n – го порядка можно поставить в соответствие выражение, которое называется ***определителем***. Определитель второго порядка вычисляется по схеме**:**



Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

|  |  |
| --- | --- |
| Определитель третьего порядка вычисляется *правилом треугольников* (правило Сарруса) по схеме: |  |

***Свойства определителей***

1. Если какая-либо строка (столбец) состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.
2. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы определитель меняет знак.
3. Если квадратная матрица содержит две одинаковых строки или столбца, то ее определитель равен нулю.
4. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.
5. Общий множитель всех элементов ряда можно вынести за знак определителя.

***Минором,*** *некоторого элемента аij определителя n-порядка называется определитель n-1- го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которого находится выбранный элемент*.

***Например,***  минор М23 соответствующий элементу а12 определителя, получается, если вычеркнуть их определителя вторую строку и третий столбец..

 М23 = .

## ***Алгебраическим дополнением элемента******аij*** *определителя, называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма i + j – четное число, и со знаком «-», если сумма i + j – нечетное число.*

### Обозначается **А*ij* = (-1)*i + j Мij.***

***Теорема Лапласа.*** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

 = а11А11 + а12А12 + а13А13.

Теорема содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

*Матрица называется* ***невырожденной****, если ее определитель не равен нулю; матрица, определитель которой равен нулю, называется* ***вырожденной****.*

*Матрица* ***А-1*** *называется* ***обратной*** *по отношению к квадратной матрице А, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица.*

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1. Находят определитель матрицы А.
2. Транспонируют матрицу.
3. Находят алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы и составляют  , где  – ***присоединенная матрица.***
4. По формуле определяют обратную матрицу.



***Рангом матрицы*** *А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы*.

**Вопросы для самопроверки**

1. Что такое определитель квадратной матрицы?
2. Какова схема вычисления определителя второго порядка?
3. По какому правилу вычисляется определитель третьего порядка?
4. Сформулируйте свойства основные определителей.
5. Дайте определение минора.
6. Сформулируйте определение алгебраического дополнения элемента матрицы.
7. Какие матрицы являются вырожденными, и какие невырожденные?
8. Какая матрица называется обратной?
9. При каком условии у матрицы существует обратная?
10. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?
11. Дайте определение ранга матрицы.

**Тема 3. “СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ”**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Системы линейных уравнений.

\* Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Решение невырожденных линейных систем.

Формулы Крамера.

Метод Гаусса.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Системой линейных алгебраических уравнений****, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида*

*а11х1 + а12х2 + ... + а1n хn = b1,*

*а21х1 + а22х2 + ... + а2n хn = b2,*

*...............................................*

*аm1х1 + аm2х2 + ... + аmn хn = bm.*

Систему линейных уравнений удобно записывать в компактной ***матричной форме***.

А ⋅ Х = В

Где А – ***основная матрица*** системы, матрица составленная из коэффициентов системы.

В – матрица-столбец свободных членов, Х – матрица-столбец неизвестных.

***Решением системы*** называются такие значения неизвестных, что при подстановке их в систему уравнений, каждое уравнение системы обращается в верное тождество.

*Система уравнений называется* ***совместной****, если она имеет хотя бы одно решение, и* ***несовместной****, если она не имеет ни одного решения*.

**Теорема *Кронекера - Капели*.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Исследовать систему значит определить, совместна она или нет.

Отыскание решения системы линейных уравнений по формуле называют ***матричным способом*** решения системы

Х = А- 1 ⋅ В

**Теорема *Крамера.*** Пусть Δ - определитель матрицы системы А, а Δj - определитель матрицы, получаемый из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:





Эти формулы получили название ***формул Крамера***.

При решении систем линейных уравнений используют также ***метод Гаусса*** *(метод последовательного исключения неизвестных),* он состоит из двух этапов.

**1 этап (прямой ход).** Система уравнений путем элементарных преобразований приводится к ступенчатому (треугольному) виду.

**2 этап (обратный ход).** Последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

*а11х1 + а12х2 + ... + а1n хn = b1,*

*а22х2 + ... + а2n хn = b2,*

*...............................................*

*аmn хn = bm.*

На втором этапе решения системы находят из последнего уравнения *хn ,* изпредпоследнего уравнения *хn - 1 ,* и так далее.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение системы линейных алгебраических уравнений.

2. Как записать систему уравнений в матричной форме? Назовите элементы, входящие в это выражение.

3. Какая матрица называется расширенной?

4. Что такое решение системы линейных уравнений?

5. Какие системы называются совместными, и какие несовместными?

6. Что значит система определенная и неопределенная?

7. Какие системы уравнений называются эквивалентными?

8. Сформулируйте теорему Кронекера - Капелли.

9. При каких условиях система имеет единственное решение и множество решений?

10. В чем состоит матричный способ отыскания решения системы уравнений?

11. Сформулируйте теорему Крамера.

12. В чем состоит метод Гаусса?

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: «Академия», 2014
2. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема 4. «ВЕКТОР. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Векторные величины. Понятие вектора.

Линейные операции над векторами.

Координаты вектора. Разложение вектора по ортам координатных осей.

Действия над векторами, заданными своими координатами.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



В

А

***Вектор*** *– это направленный прямолинейный отрезок.*

,





Пример *противоположных* векторов

***Сумму*** *двух векторов* определяют *правилом треугольника* или *правилом параллелограмма*.











***Произведение***вектора  ***на число*** k, при k = 2 и k = –2 выглядит так:













***Нулевым вектором*** называют вектор, начало и конец которого совпадают.

Два вектора называют ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если в пространстве заданны три попарно перпендикулярных единичных вектора , отложенные от некоторой точки О, то будем называть эту тройку векторов ***прямоугольным базисом*** в пространстве.

|  |  |
| --- | --- |
| 0  x  M1      z  M3      M  M2  y | Координаты точки М, т.е. числа x,  y, z называют ***координатами вектора*** .  Формула ***разложения вектора по ортам координатных осей*** .  – формула ***длины вектора***. |

***Координаты вектора*** , если известны координаты точек А (x1; y1;z1) и В (x2; y2;z2) находятся по формуле



***Скалярным произведением*** двух векторов  и  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.



Скалярное произведение двух векторов можно вычислять через их координаты. *Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*



Координаты точки М, делящей отрезок АВ в заданном отношении λ, находятся по формулам

.

**Вопросы для самопроверки**

* + - 1. Дать определение вектора.
      2. Какой вектор называется нулевым?
      3. Какие векторы называбтся равными?
      4. При каком условии векторы будут коллинеарны?
      5. Какие векторы называются компланарными?
      6. Назовите линейные операции над векторами.
      7. Какими способами можно найти сумму векторов?
      8. Что такое орт?
      9. Напишите формулу разложения вектора по заданному базису.
      10. Как определяется длина вектора через его координаты?
      11. Что называется скалярным произведением векторов?
      12. По каким формулам находятся координаты точки, делящей отрезок в заданном направлении?

Тема 5. «ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Основные понятия

Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Уравнения прямой на плоскости

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Линия на плоскости рассматривается как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим свойством.

*Уравнение линии на плоскости Оху называется такое уравнение F(x; y) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты х и у каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

|  |  |
| --- | --- |
| **0**  **L**1  **L**2  α1  ϕ  **х**  **у**  **α**2 | Угол между двумя пересекающимися прямыми может быть определен по следующей формуле  .    Но tg α1 = k1, tg α2 = k2, поэтому |

*Условие параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: k1 = k2.*

*Условие перпендикулярности прямых является равенство .*

Если требуется найти *расстояние между прямой L*, заданной общим уравнением Ах + Ву + С = 0 и *точкой* М0(х0; у0), пользуются формулой



**Уравнения прямой на плоскости**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Способ задания** | **Уравнение прямой с угловым коэффициентом** | **Общее уравнение прямой** | **Каноническое уравнение прямой** | **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении** | **Уравнение прямой, проходящей через две точки** | **Уравнение прямой в отрезках** | **Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярную данному вектору** |
| **Общий вид уравнения** | **y = kx + b** | **Ax + By + C = = 0** |  | **y –y0 =**  **k (x – x0 )** |  |  | **A(x – x0) + B(y –y0) = 0** |
| **Вспомогательные понятия** | k – угловой коэффициент  k = tg α =  = (y – b) / x – тангенс угла наклона прямой к оси ОХ | А, В, С – произвольные числа.  А и В не равны одновременно нулю. | *Направляющий* *вектор* – ненулевой вектор a(а1 , а2) параллельный данной прямой.  *Каноническое уравнение прямой* – уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору | – | х1 ≠ х2  у1 ≠ у2 | a, b – числа, которые отсекает прямая на осях координат | *Нормальный вектор прямой* – это вектор n (А,В) перпендикулярный прямой.  А,В – координаты вектора |
| **Схематический график** | У  М(х;у)    B  0 x | – | У  М  a  М0  х | У  М(х0;у0)      х | Y M2(x2; y2)  M1(x1;y1)  0 x | У  B(0; b)  A(a;0)  0 x | Y  N  М  M0  0 x |
| **Частные случаи** | 1. Если **b = 0** ⇒  **y = kx**  k<0 k>0  x  2. Если **α = 0** ⇒  **у = b –** прямая параллельная оси Ох    B(0; b) y = b  x  3. Если α = π / 2, то х = а , т. к. tgπ / 2 не существует.  У    х = а  а х | **1**. А = 0 ⇒  **у = – C/B –**  прямая параллельная оси Ох  **2**. В = 0 ⇒  **х = – С/А –** прямая параллельная оси Оу  **3**. С = 0 ⇒  **Ах + Ву = 0** ⇒  **у = ( – А/В) х –** прямая, проходящая через начало координат **k = – A/B**  **4.** A =C = 0 ⇒  **y = 0 –** прямая совпадает с осью Ох  **5.**В = С = 0 ⇒  **х = 0 –** прямая, совпадающая с осью Оу |  | Если в уравнении k – произвольное число, то уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку M0(х0;у0), кроме прямой параллельной оси Оу, т. к. не существует угловой коэффициент.  У  х = х0 – х  прямая не входящая в пучок  точка М0 – центр пучка | Если х2 = х 1, то уравнение **х = х1**  прямая параллельная оси Оу.  Если у2 = у 1, то уравнение **у = у1**  прямая параллельная оси Ох. |  |  |

Вопросы для самопроверки

Сформулируйте определение линии на плоскости.

* + - 1. Как установить принадлежность точки данной линии, не прибегая к рисунку?
      2. Какой формулой задается уравнение прямой с угловым коэффициентом?
      3. Какой формулой задается общее уравнение прямой? Его особенности?
      4. Какой формулой задается уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении?
      5. Что означает выражение «пучок прямых»?
      6. Какой формулой задается уравнение прямой, проходящей через две точки?
      7. Какой формулой задается уравнение прямой в отрезках?
      8. Какой формулой задается уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору?
      9. Как определяется угол между прямыми?
      10. Каково условие параллельности прямых?
      11. Каково условие перпендикулярности прямых?
      12. Как рассчитывается расстояние от точки до прямой?

Тема 6. Кривые второго порядка

Уравнение второй степени с двумя переменными

Окружность и ее уравнение

Эллипс и его уравнение

Гипербола и ее уравнение

Парабола и ее уравнение

*Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных х и у называются* ***кривыми второго порядка*.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Каноническое уравнение окружности**  (x – *a)*2 + (y – b)2 = R2  Где *(a; b)* – координаты ее центра, в частности при  *a = 0* и *b = 0* (т.е. центр окружности совпадает с началом координат), уравнение умеет вид  **x 2 + y 2 = R2** | y  O  *a*  R  x  b |
| **Каноническое уравнение элипса**    Где *a – большая полуось, b* – *малая полуось эллипса, с –* половина расстояния между фокусами.*.*  *Эксцентриситетом*ε эллипса называется отношение фокусного расстояния *2с* к большой полуоси *2а*:  *ε = c ⁄ a*  Сотношение (*a, b, с*) *а* 2 – *b* 2 = с2. | y  O  *a*  b  x  F2  F1 |
| **Каноническое уравнение гиперболы**    Где *a – действительная, b* – *мнимая полуось гиперболы, с – половина расстояния между фокусами*  *(с 2= а 2+ b 2). Число ε = c ⁄ a* – называется *эксцентриситетом гиперболы.*  *Асимптоты гиперболы* определяются уравнениями  . | c  b  *a*  y  x  F1  F2 |
| **Каноническое уравнение параболы**  *y 2 = 2px*  Где р > 0 – *параметр параболы*, координаты фокуса F(p/2; 0) параболы. Уравнение *директрисы парадолы* иммет вид . | x  *p/2*  *p/2*  F  O  y |

Вопросы для самопроверки

* + - 1. Каким уравнением описывается кривая второго порядка на плоскости?
      2. Напишите уравнение окружности.
      3. Запишите каноническое уравнение эллипса?
      4. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?
      5. Чему равен эксцентриситет окружности?
      6. Каково каноническое уравнение гиперболы?
      7. Какими уравнениями определяются асимптоты гиперболы?
      8. Запишите каноническое уравнение параболы, уравнение директрисы параболы?

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: «Академия», 2014
2. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013

Глава III. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 7. «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИИ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Понятие множества

# Абсолютная величина действительного числа

Окрестность точки

# Понятие функции

\* Способы задания функций

Основные элементарные функции

Сложная функция

\* Обратная функция

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Множество –*** *соединение, совокупность некоторых предметов, объединенных по какому–либо признаку.*

***Абсолютной величиной (или модулем)*** *числа х называют само число х, если х ≥ 0, или число –х, если х < 0.*

|х| = х, если х ≥ 0

–x, если х < 0

***Функция f*** *– множество упорядоченных пар чисел (х; у), таких что х ∈ Х, y ∈Y и ∀ х входит в одну и только одну пару, а ∀ у по крайней мере в одну.*

*Функция f(x) называется* ***четной [нечетной]****, если область ее определения Х есть множество, симметричное относительно начала координат, и если при ∀ х ∈ X имеет место равенство f(–x) = f(x) [f(–x) = –f(x)].*

График четной функции симметричен относительно нуля

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется ***функция общего вида.***

*Функция f(x) называется* ***периодической****, если ∃ число Т ≠ 0 такое, что для ∀ х ∈ Х выполняется равенство: f(x + Т)= f(x),* ***– период функции****.*

*Пусть на некотором множестве Х определена функция z = ϕ(x) со множеством значений Z, а на множестве Z – функция у = f(z), тогда функция у = f[ϕ(х)] называется* ***сложной функцией от х (****или* ***суперпозицией*** *заданных функций****,*** *или* ***функцией от функции).***

*Например*. У = sin x2 есть суперпозиция двух функций у = sin *z* и *z =* x2.

**Основные элементарные функции**

1. ***Степенная функция у = ха***

0

y

y = kx

x

1) **у = х** (а = 1)

Х ∈ (- ∞; + ∞)

Не периодическая, нечетная.

Возрастает на - ∞ < x < + ∞

2) **у = х2 (а = 2)**

Х ∈ (- ∞; + ∞) Y ∈ [0; + ∞)

Не периодическая, четная.

y

0

x

Y = x2

Наименьшее у = 0 при х = 0

Убывает - ∞ < x ≤ 0 .

Возрастает 0 ≤ x < + ∞.

График – **парабола.**

3) **у = х3 (а = 3)**

x

0

y = x3

y

Х ∈ (- ∞; + ∞) Y ∈ (- ∞; + ∞)

Не периодическая, нечетная.

Возрастает на Х.

График – **кубическая парабола**,

симметричная относительно

начала координат.

4) **у = √х (а = ½)**

Х ∈ [0; + ∞) Y ∈ [0; + ∞)

y

y = √x

x

у наим. = 0 при х = 0

Не периодическая,

ни четная, ни нечетная.

Возрастает 0 ≤ x < + ∞.

5) **у = 1/х(а = -1)**

Х ∈ (- ∞; 0) ∪ (0; + ∞), Y ∈ (- ∞; 0) ∪ (0; + ∞)

0

y

y = 1/x

x

Не периодическая.

Точек пересечения с осями нет.

Нечетная, симметричная.

График – **гипербола**.

6) **у = 1/х2 (а = -2)**

Х ∈ (- ∞; 0) ∪ (0; + ∞), Y ∈(0; + ∞)

0

y = 1/x2

y

x

Не периодическая, четная.

Точек пересечения с осями нет.

Симметрична относительно ОY.

1. ***Показательная функция у = ах***

1

0

y = ax

0 < a < 1

y

y= ax

a > 1

х

Х = (- ∞; + ∞), Y = (0; + ∞)

Не является периодической

Ни четная, ни нечетная

Если а > 1, то возрастает

на - ∞ < x < + ∞

Если 0 < a < 1, то убывает

на Х = (- ∞; + ∞)

Симметрична относительно ОY

1. ***Логарифмическая функция у = logax***

Х = (- ∞; + ∞), Y = (0; + ∞) Не является периодической.

y

у = logax, a >1

у = logax, <a<1

Ни четная, ни нечетная.

Если а > 1, то возрастает x

на 0 < x < + ∞ .

Если 0 < a < 1, то убывает.

1. ***Тригонометрические функции***

1) **y = sin x**

X = (- ∞; + ∞), Y = [-1; 1]

Наименьшее значение у = -1 при x = -π/2 + 2πk.

Наибольшее значение у = 1 при x = π/2 + 2πk.

Функция нечетная, периодическая. Период Т = 2π.

Точки (πk; 0) – точки пересечения с осями.

y= sin x

–1

─π

у

х

1

π

2) **y = соs x**

X = (- ∞; + ∞), Y = [-1; 1]

Функция принимает наименьшее значение у = -1 при x = 2πk2 + π.

Наибольшее значение у = 1 при x = 2πk.

Функция четная, периодическая. Период Т = 2π.

Точки (π/2 + πk; 0), k = 0, … – точки пересечения с осью ОХ.

–1

y = cos x

–π/2

π/2

у

х

1. ***Обратные тригонометрические функции***

1) **у = arcsin x**

X = [-1; 1], Y = [-π/2; π/2] y

у = -π/2 при х = -1 π/2

у = π/2 при х = 1

Не является периодической. -1 1 х

Нечетная. Возр. [-1; 1]. -π/2

Точка (0; 0) – единственная точка пересечения.

2) **у = arccos x** у

X = [-1; 1], Y = [0; π] π

у = π при х = -1

у = 0 при х = 1 π/2

Не является периодической.

Не является ни четной, ни нечетной. -1 1 х

Убыв. [-1; 1].

Точки (0; π/2) и (1; 0) – точки пересечения с осями.

**Вопросы для самопроверки**

1. Дайте определение множества.
2. Какие числовые множества называются промежутками?
3. Какие числовые множества называются отрезками?
4. Что называется абсолютной величиной числа?
5. Сформулируйте свойства модуля?
6. Сформулируйте определение функции.
7. Что называется областью определения функции и множество значений функции?
8. Какие функции называются возрастающими, убывающими?
9. Какие функции называются невозрастающими и неубывающими?
10. Что называется графиком функции? Приведите примеры.
11. Какие функции называются четными, и какие нечетными и в чем состоит геометрический смысл четности и нечетности функций?
12. Какие функции называются периодическими, и что называется периодом функции?
13. Какими способами можно задавать функции? Приведите примеры.
14. Какие функции называются простейшими элементарными функциями?

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: «Академия», 2014
2. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013

**Тема 8. «ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ.**

**ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Числовая последовательность

2. Предел числовой последовательности

3. Операции над пределами последовательностей

4. Примеры нахождения пределов числовых последовательностей

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Множество чисел, занумерованных либо конечном отрезком натурального ряда, либо всеми натуральными числами, называется* ***числовой последовательностью.***

*Например*. Рассмотрим последовательность:

1 – 1/1; 1– 1/2; 1 – 1/3; 1 – 1/4; …

Чаще всего последовательность задается формулой ее общего члена *xn.*

*xn = f(n),*

*Например. Хn = n2 + 1, n∈ N* задает последовательность 2, 5, 10, … , *n2 + 1, …*

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Последовательность {x n} называется ***ограниченной сверху (ограниченной снизу)***, если существует такое число М, что все члены последовательности меньше (соответственно, больше), чем М.

Последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно, *называется ограниченной*.

*Число а называется* ***пределом последовательности****, если для ∀ ε >0 ∃ N (можно указать), начиная с которого выполняется неравенство |xn – a| < ε*

******

***или xn → a***

***Сходящаяся последовательность имеет только один предел***. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

**Операции над пределами последовательностей**

Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности) их пределов

 .

Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

.

В частности:

– постоянный множитель можно вынести за знак предела: .

– предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела .

Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов (если предел в знаменателе не равен 0):

.

**Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте определение числовой последовательности.
2. Какая последовательность называется ограниченной? Неограниченной?
3. Какая последовательность называется возрастающей? Убывающей?
4. Приведите примеры ограниченных и неограниченных последовательностей.
5. Сформулируйте определение предела числовой последовательности. Каков его геометрический смысл?
6. Какая последовательность называется сходящейся? Расходящейся?
7. Каков признак существования предела последовательности?
8. Назовите операции над пределами последовательностей.
9. Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.
10. Сформулируйте достаточное условие сходимости последовательности

**Тема 9. «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Предел функции в точке и в бесконечности

Бесконечно большие и бесконечно малые величины

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

Основные теоремы о пределах

\*Односторонние пределы

\*Замечательные пределы

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

*Окрестностью точки х0* называется любой интервал с центром в точке х0*.*

*Число А называется* ***пределом функции f(x) в точке х0****, если для всех значений х, достаточно близких к Аи отличных от А, значения функции f(x) сколь угодно мало отличаются от А.*

Более строгое определение предела функции в точке дается на языке *ε – δ.*

*Число А называется* ***пределом функции*** *f(x) при х → х0, если для любого ε > 0 найдется такое δ > 0, зависящее от ε, что для всех х ≠ х0, удовлетворяющих неравенству |x – x0| < δ выполняется неравенство |f(x) – A| < ε.*

*Обозначается .*

*Число В называется* ***пределом функции f(x) на бесконечности,*** *если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента х соответствующее значение функции f(x) сколь угодно мало отличается от числа В.*

Определение предела функции на бесконечности языке *ε – δ* звучит так*.*

Пусть f(x) определена на R. *Число В называется* ***пределом функции f(x) при х → ∞,*** *если для любого ε > 0 найдется такое М > 0, что для всех х, удовлетворяющих неравенству |х| > M, выполняется неравенство |f(x) – B| < ε.*

*Обозначается .*

*Числовая функция f(x) называется* ***бесконечно малой функцией*** *(или бесконечно малой величиной) при х → х0, если ее предел при х стремящимся к х0 стремится к нулю.* 

*Например.* F(x) = x2 при х → 0,

f(x) = cos x при х → π/2,

f(x) = sin x при х → 0.

*Функция у = f(x) называется* ***бесконечно большой функцией*** *(или бесконечно большой величиной), если ее предел при х стремящимся к х0 стремится к бесконечности.* .

*Например.* F(x) = 1/x при х → 0,

f(x) = tg x при х → π/2

***Свойство бесконечно больших функций:*** Если функция α(х) есть бесконечно малая величина при х→х0 ( при х → ∞), то функция *f(x)* = является бесконечно большой величиной, и обратно, если *f(x)*  бесконечно большая функция при х→х0 ( при х → ∞), то функция является бесконечно малой**.**

Основные теоремы о пределах

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов  ± .

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:  ⋅.

Постоянный множитель можно вынести за знак предела.  = с⋅.

Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

.

**Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте определение предела функции в точке.
2. Какие пределы называются односторонними?
3. Сформулируйте определение предела функции в бесконечности.
4. Дайте определение бесконечно малых и бесконечно больших величин. Приведите примеры.
5. Сформулируйте теоремы о б.б.ф. и б.м.ф.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
7. Назовите замечательные пределы.

# **Тема 10 . «НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ»**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Понятие непрерывности функции.

Точки разрыва функции и их классификация.

Основные теоремы о непрерывных функциях.

\*Свойства функций непрерывных в точке.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*Функция f(x) называется* ***непрерывной в точке х0****, если она определена в некоторой окрестности этой точки и предел функции и ее значение в этой точке равны .* ***Чтобы функция была непрерывна, должны выполняться условия****:*

10. Функция f(x) определена в точке *х0*  и в ее окрестности**.**

20. У f(x) должен существовать конечный предел при х → х0, т.е.



30. Предел функции равен значению функции в точке

*а = f(x0).*

Если обозначить *Δ x = х – х0 (приращение аргумента),*  *Δ y = f(x) - f(x0) (приращение функции,* соответствующие приращению аргумента *Δ x),* то это определение можно записать в эквивалентной форме.

*Функция f(x) называется* ***непрерывной*** *в точке х0, если ее приращение в этой точке*

*Δ y стремиться к нулю при Δ x → 0.*

Если какое – либо из условий непрерывности функции в точке х0 не выполняется, то функция называется ***разрывной*** в точке х0. А сама точка х0 – ***точка разрыва****.*

*Например*, функция  неопределенна в точке х0=2, значит при х0=2 функция терпит разрыв.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

***Разрыв I рода*** (существуют конечные пределы слева и справа при х→х0, но они не равные).

***Разрыв II рода*** (когда один из односторонних пределов равен  или не существует).

Свойства функций непрерывных в точке

* + - 1. Если функции *f(x)* и *ϕ(x)* непрерывны в точке, то их сумма, произведение, частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) являются функциями непрерывными в этой точке.
      2. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой данная функция определена.
      3. Если функция *у = f(u)* непрерывна в точке *u0 = ϕ(x0),* а функция *u = ϕ(x)*  непрерывна в точке *х0* , то сложная функция *у = f(ϕ(x) )* непрерывна в точке *х0.*

*Функция f(x) называется* ***непрерывной на отрезке [a; b] ,*** *если она определена в каждой точке этого отрезка.*

Свойства функций непрерывных на отрезках применяются в различного рода задачах.

**Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте определение непрерывности функции.
2. Что называется приращением аргумента *х* и приращением функции *f(x)* в точке х0? Раскройте геометрический смысл этих приращений и сформулируйте соответствующее определение непрерывности функции.
3. Какая функция называется непрерывной в интервале и непрерывной на отрезке?
4. Какая функция называется разрывной?
5. Какие точки разрыва функции существуют?
6. Сформулируйте основные теоремы о непрерывных функциях.
7. Какими свойствами обладают непрерывные на отрезке функции?
8. В чем заключается «метод половинного деления»?

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: «Академия», 2014
2. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013

# **Глава IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

# **Тема 11. « ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ»**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\* Задачи, приводящие к понятию производной

Определение производной

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью

Основные правила дифференцирования

Правила дифференцирования

Производные основных элементарных функций

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Производной функции*** *у = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последней к 0 (если существует предел).* y’= 

Вычисление производной называется ***дифференцированием*** функции.

Теорема. *Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна.*

***Геометрический смысл производной****:* производная f ’(x0) есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой *у = f(x)* в точке х0, *k =* tg *(α) = f ’(x0).*

**y – f(x0) = f ’(x0)(x – x0)** – уравнение касательной .

Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется нормалью кривой и имеет уравнение

.

***Механический смысл производной***: если функция y = f(x) описывает какой – либо физический процесс, то ее производная есть скорость протекания этого процесса.

Для нахождения производной, необходимо произвести следующие операции:

1. Придают аргументу приращение Δх ≠ 0 и находят приращение значения функции: у + Δу = f(x + Δх).
2. Находят приращение функции: Δу = f(x + Δх) – f(x).
3. Составляют отношение .
4. Находят предел этого отношения при Δх → 0.

у’ =  (если ∃)

**Основные правила дифференцирования**

1. Производная постоянной равна 0. **С’ = 0**

2. Производная аргумента равна 1. **x’ = 1**

3. Если функции u(x) и v(x) имеют производные во всех точках интервала (а; b), то

**(u ± v) ′ = u ’ ± v ’** (для ∀ х ∈ D)

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна

**(uv)’ = u’v + uv’**

5. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

**(Сu)’ = Cu’**

6. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле, если v(x) ≠ 0.



Если y = f(u) и u = ϕ (x) – дифференцируемые функции от своих аргументов, то ***производная сложной функции*** равна производной функции по промежуточному аргументу u умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной.

**y’ = f’(u) ⋅u’.**

Производной n-го порядка называется производная от производной (n – 1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

**Таблица производных**

|  |  |
| --- | --- |
| * + - 1. *с′ = 0.*       2. *х′ = 1.*       3. *(х n) ′ = n x n-1.*       4. .       5. .       6. *(a x) ′ = a x ln a.*       7. .       8. *(ln x) ′* =   9. *(lg x)* ′ = . | 1. *(e x ) ′ = e x*. 2. *(sin x) ′ = cos x*. 3. *(cos x) ′ = – sin x.* 4. *(tg x) ′* = . 5. *(ctg x) ′* =  . 6. *(arcsin x) ′* = . 7. *(arccos x) ′* = – . 8. *(arctg x) ′* =  . 9. *(arcctg x) ′ =* . |

Вопросы для самопроверки

* + - 1. Какие задачи приводят к понятию производной?
      2. Дайте определение производной функции f(x) в точке х0.
      3. Каков геометрический смысл производной?
      4. Дайте определение касательной и нормали к графику функции в точке и напишите их уравнения.
      5. Каков физический смысл производной?
      6. Как по определению найти производную функции?
      7. Сформулируйте теоремы зависимости между непрерывностью и дифференцированностью функции.
      8. Напишите правила дифференцирования функций.
      9. Как определяется производная сложной функции?
      10. Напишите производные основных элементарных функций.

Тема 12. «ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\* Основные теоремы дифференциального исчисления.

Правило Лопиталя.

Возрастание и убывание функций.

Максимум и минимум функций.

Наибольшее и наименьшее значение функций на отрезке.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Асимптоты графика функции.

Общая схема исследования функции и построение графиков.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Способ раскрытия неопределенностей вида 0/0 или ∞ /∞, основанный на применении производных носит название правило Лопиталя.

*Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует в указанном смысле.*



Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построение графика функций

***Условие возрастания***. Если производная дифференцируемой функции, положительна внутри некоторого промежутка Х, то она возрастает внутри этого промежутка.

***Условие убывания***. Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка Х, то она убывает на этом промежутке*.*

*Точка х0 называется* ***точкой максимума*** *функции f(x), если в некоторой окрестности точки х0 выполняется неравенство f(x)≤ f(x0).* Аналогично определяется точка минимума функции.

Значение функции в точке максимума или минимума функции называется ***экстремумом*** функции. Точки, в которых производная функции равняется нулю или не существует называются ***критическими***.

Если при переходе через критическую точку x0 производная непрерывной дифференцированной функции меняет знак с “+” на “ – ”, то точка x0 есть точка **максимума** функции, а если с “ – “ на “+”, то точка **минимума.**

Пусть функция f (x) непрерывна на отрезке [a, b]. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

***Точкой перегиба*** *графика непрерывной функции у = f(x) называется точка, разделяющая интервалы, на которых функция выпукла вверх и вниз.*

|  |  |
| --- | --- |
| у  0 х | *График дифференцируемой функции f (x) называется* ***выпуклым вниз*** *на интервале (a, b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.* |
| У      0 х | *График дифференцируемой функции f (x) называется* ***выпуклым вверх*** *на интервале (a, b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.* |

Если функция у = f (x)во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. **f′′(x) < 0**, то график функции в этом интервале **выпуклый вверх**. Если же **f ′′ (x) > 0** ∀х ∈ (a, b)– график функции **выпуклый вниз.**

Если вторая производная f′′(x) при переходе через точку х0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка х0 – ***точка перегиба.***

***Асимптотой*** *графика функции называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки до кривой.*

Асимптоты могут быть вертикальными, горизонтальными и наклонными.

|  |  |
| --- | --- |
| у  0 х0 х | **Теорема.** Пусть у = f (x) определена в некоторой точке х0 (исключая быть может саму точку) и хотя бы один из пределов функции при х→х0 справа или слева равен бесконечности, тогда прямая х=х0 является **вертикальной асимптотой**.  или |
| х  0  у    b | **Теорема**. Пусть функция у = f (x) определена при достаточно больших х и существует конечный предел функции .  Тогда прямая у = b есть **горизонтальная асимптота**. |
| y=kx+b  У  0 Х | **Теорема**. Пусть функция у = f (x) определена при достаточно больших х и существуют конечные пределы  и .  Тогда прямая y = kx + b является **наклонной асимптотой**. |

**Общая схема исследования функции и построения графиков**

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

3. Найти вертикальные асимптоты графика функции.

4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.

5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения с осями координат.

8. Построить график функции.

**Вопросы для самопроверки**

* + - 1. Сформулируйте основные теоремы дифференциального исчисления.
      2. Сформулируйте правило Лопиталя. Для чего оно применяется?
      3. Какие функции называются монотонными?
      4. Каковы условия возростания (убывания) функции?
      5. Дайте определение экстремума функции.
      6. Может ли функция иметь несколько экстремумов?
      7. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие экстремума.
      8. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
      9. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие экстремума.

10. Какие точки называются критическими?

11. Сформулируйте правило исследования функции на экстремум.

1. Как находится наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке? Где используется данное исследование?
2. Дайте определение направления выпуклости графика функции.
3. Сформулируйте теорему с помощью, которой решается вопрос о направлении выпуклости графика функции.
4. Дайте определение точек перегиба графика функции.
5. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба графика функции.
6. Дайте определение асимптоты кривой.
7. Каким образом находятся асимптоты графика функции?
8. Приведите схему исследования функции и построения ее графика.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: «Академия», 2014
2. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013