**Методические рекомендации по организации**

**самостоятельной внеаудиторной работы студентов**

**по дисциплине Элементы высшей математики**

Смоленск

2014

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………..…..…...3

1. Сущность и характеристики самостоятельной работы……………………….…..…4

2.Мотивация студентовк внеаудиторной самостоятельной работе………...……..…7

3. Методические рекомендации по конспектированию текста………………….……10

4. Методические рекомендации по разработке опорного конспекта………………..11

5. Методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ ……14

6. Методические рекомендации по созданию презентаций ………………………….15

7. Методические рекомендации  составлению, заполнению обобщающих таблиц, схем……………………………………………………………………………………… 19

8. Индивидуальная самостоятельная работа в виде решения задач, проблемных ситуаций………………………………...…………………………………………………..27

Раздел I. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии ……………..28

Раздел II. Введение в анализ ………………………………………………………48

Раздел III. Дифференциальное исчисление ………………………………………58

Раздел IV. Комплексные числа……………………………………………………68

Раздел V. Интегральное исчисление ………………………………….………….72

Раздел VI. Дифференциальные уравнения ……………………………………….83

Раздел VII. Ряды ……………………………………………...……………………91

Раздел VIII. Функции нескольких переменных…………………………………..98

9. Методические рекомендации по подготовке, защите докладов, рефератов …....105

10. Литература…………………………………………………………………………..107

"Скажи мне и я забуду. Покажи мне и я запомню.

Дай мне действовать самому и я научусь."

Китайская мудрость

**Введение**

Требования работодателей к современному специалисту, а также федеральный государственный образовательный стандарт СПО ориентированы прежде всего на умения самостоятельной деятельности и творческий подход к специальности. Профессиональный рост специалиста, его социальная востребованность, как никогда, зависят от умения проявить инициативу, решить нестандартную задачу, от способности к планированию и прогнозированию самостоятельных действий. Стратегическим направлением повышения качества образования в этих условиях является оптимизация системы управления учебной работой обучаемых, в том числе и их самостоятельной работой.

Переход на компетентностную модель образования, введение системы непрерывного образования "через всю жизнь" предполагает значительное увеличение доли самостоятельной познавательной деятельности студентов. Превращение студента из объекта педагогического воздействия в активнодействующего субъекта образовательного процесса, выстраивающего своё образование совместно с преподавателем, является необходимым условием достижения им соответствующих компетенций. Более того, самостоятельная работа студента направлена не только на достижение учебных целей - обретение соответствующих компетенций, но и на формирование самостоятельной жизненной позиции как личностной характеристики будущего специалиста, повышающей его познавательную, социальную и профессиональную мобильность, формирующую у него активное и ответственное отношение к жизни.

Предметно и содержательно самостоятельная работа регламентирована государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования третьего поколения, основной профессиональной образовательной программой по специальности, нормативно – правовыми документами федерального и локального уровней.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет компетентностный подход в образовании, на базе которого осуществляется формирование общих и профессиональных компетенций самостоятельного труда специалиста, необходимых как для самообразования, так и для дальнейшего повышения квалификации в системе непрерывного образования, развития профессиональной карьеры.

1. **Сущность и характеристики самостоятельной работы**

Самостоятельная работа студентов – это процесс активного, целенаправленного приобретения студентом новых знаний, умений без непосредственного участия преподавателя, характеризующийся предметной направленностью, эффективным контролем и оценкой результатов деятельности обучающегося.

Согласно Типовому положению об образовательном учреждении среднего профессионального образования (среднем специальном учебном заведении), утверждённому постановлением Правительства Российской Федерации от 18 июля 2008 года № 543, самостоятельная работа является одним из видов учебных занятий студентов.

**Функции самостоятельной работы:**

- информационно – обучающая;

- развивающая;

- ориентирующая;

- стимулирующая;

- воспитывающая.

**Цели самостоятельной работы:**

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

- углубление и расширение теоретических знаний;

- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;

- развитие познавательных способностей, активности студентов,

творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа является формой организации учебно-познавательной деятельности, средством активизации процесса обучения, видом познавательной деятельности обучаемых, системой педагогических условий, обеспечивающих управление познавательной деятельностью.

**Признаки самостоятельной работы:**

- наличие конкретной цели и задания;

- чёткая форма выраженности результата работы;

- определение формы контроля работы;

- определение критериев оценивания результатов работы;

- обязательность выполнения работы каждым обучающимся.

**Виды самостоятельной работы в учебном процессе среднего специального учебного заведения:**

- аудиторная;

- внеаудиторная.

Внеаудиторная самостоятельная работа – вид самостоятельной работы, выполняемой студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

**Таблица 1. Примерные нормы времени, отводимые на выполнение внеаудиторной самостоятельной работы**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Виды заданий для самостоятельной работы** | **Отчётный материал** | **Время для подготовки** | **Единица измерения за семестр**  **(максимальное количество)** | **Отметка о включении в портфолио** |
| 1. | Составление плана текста объёмом до 20 страниц | План | 30 минут | 4 | **+** |
| 2. | Конспектирование  с комментариями  (анализ текста) | Конспект | 1 час | 2 | **+** |
| 3. | Разработка опорных конспектов | Конспект | 1 час | 2 | **+** |
| 4. | Выполнение чертежей, схем, таблиц, презентаций | Чертёж, схема, таблица | 2 часа | 5 | **+** |
| 5. | Выполнение расчётно-графических работ | Расчётно-графическая работа | 3 часа | 2 | **+** |
| 6. | Эссе | Эссе | 2 часа | 1 | **+** |
| 7. | Выполнение творческих домашних заданий | Творческое задание | 2 часа | 2 | **+** |
| 8. | Разбор кейсов | Оформление проблемы | 2 часа | 32 часа-1;  свыше 32 часов-2; | **+** |
| 9. | Подготовка к деловой игре | В соответствии  с целями | 4 часа | 32 часа-1;  свыше 32 часов-2; | **+** |
| 10. | Индивидуальная самостоятельная работа в виде выполнения упражнений, решения ситуаций, задач | Упражнения,  решение задач, ситуаций | 1 час | К каждому учебному занятию | **+** |
| 11. | Написание реферата, подготовка презентации | Реферат, презентация | 6 часов | 1 | **+** |
| 12. | Проведение  мини-исследований в рамках СНО | Отчёт о мини-исследовании | 8 часов | 1  (учебный год) | **+** |
| 13. | Создание тематических web-страниц | web-страница | 1 час | 1 | **+** |
| 14. | Разработка и проведение проектов | Проект | 8 | 1  (учебный год) | **+** |

**2. Мотивация студентов к самостоятельной внеаудиторной работе**

Эффективная внеаудиторная самостоятельная работа студентов возможна только при наличии серьезной и устойчивой мотивации.

*Факторы, способствующие активизации самостоятельной работы студентов:*

1. Осознание полезности выполняемой работы.

Если студент знает, что результаты его работы будут использованы, например, при подготовке публикации или иным образом, то отношение к выполнению задания существенно меняется, качество выполняемой работы возрастает. Другим вариантом использования фактора полезности является активное применение результатов работы в профессиональной подготовке.

2. Творческая направленность деятельности студентов.

Участие в научно-исследовательской, опытно-конструкторской, проектной работе на кафедре для ряда студентов является значимым стимулом для активной внеаудиторной работы.

3. Игровой тренинг, в основе которого лежат деловые игры, которые предоставляют возможность осуществить переход от односторонних частных знаний к многосторонним знаниям об объекте, выделить ведущие противоречия, приобрести навык принятия решения.

4. Участие в научно – практических конференциях, конкурсах профессионального мастерства, олимпиадах по учебным дисциплинам.

5. Использование мотивирующих факторов контроля знаний (накопительные оценки, рейтинг).

6. Дифференциация заданий для внеаудиторной самостоятельной работы с учётом интересов, уровня подготовки студентов по дисциплине.

Чтобы развить положительное отношение студентов к внеаудиторной самостоятельной работе, следует на каждом её этапе разъяснять цели, задачи её проведения, контролировать их понимание студентами, знакомить обучающихся с алгоритмами, требованиями, предъявляемыми к выполнению определённых видов заданий, проводить индивидуальную работу, направленную на формирование у студентов навыков по самоорганизации познавательной деятельности.

**Таблица 2. Содержание этапов организации самостоятельной внеаудиторной работы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Характеристики деятельности | Преподаватель | Студент |
| Цель самостоятельной внеаудиторной работы | Объясняет, даёт инструктаж о целях и способах работы | Осознаёт и принимает цель, знакомится с требованиями |
| Мотивация | Раскрывает теоретическую и практическую значимость работы, мотивирует студента на успех | Осознание потребности в выполнении, установка на реализацию |
| Управление | Осуществляет целенаправленное воздействие, даёт общие ориентиры выполнения работы | Осуществляет управление (проектирует, планирует, распределяет время и др.) |
| Контроль | Предварительный рубежный и итоговый контроль | Оперативный текущий контроль и коррекция способов деятельности и результатов |
| Оценка | Общая оценка работы, указание на ошибки, рекомендации | Самооценка, самокоррекция |

Организация самостоятельной внеаудиторной работы при подготовке специалистов регулируется определёнными принципами: регламентацией самостоятельных заданий по объёму и времени, обеспечением условий для её организации и управления.

*Условия, обеспечивающие эффективность*

*внеаудиторной самостоятельной работы студентов:*

1. Научно – профессиональное самосовершенствование преподавателей: накопление и обобщение опыта по руководству самостоятельной внеаудиторной работой, методический обмен опытом, педагогическое самообразование.

1. Организационные условия: бюджет времени, информационные ресурсы (учебные пособия, справочники, обучающие программы и т.д.), материальные ресурсы.
2. Методические условия: планирование самостоятельной работы, обучение студентов алгоритмам выполнения различных видов самостоятельной работы, наличие методических и оценочных материалов, организация консультирования студентов, возможность публичного обсуждения результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов.
3. Формирование у студентов общих компетенций: формирование умения организовывать собственную деятельность, определять цели и выбирать пути их достижения, владеть культурой мышления, обобщать, анализировать, воспринимать информацию, определять цели и задачи, способы наиболее рационального решения поставленных задач, корректировать результаты самостоятельной работы, выявлять причины ошибок, затруднений и намечать пути их устранения в дальнейшей работе.

Задания для самостоятельной работы должны соответствовать целям различного уровня, отражать содержание изучаемой дисциплины, включать различные виды и уровни познавательной деятельности студентов.

*Основными критериями оценки результатов самостоятельной внеаудиторной работы студента являются:*

- уровень освоения студентом учебного материала;

- уровень сформированности умения использовать теоретические знания при выполнении практических задач;

- уровень сформированности общих компетенций;

- уровень сформированности профессиональных компетенций;

- оформление материала в соответствии с предъявляемыми требованиями.

**3. Методические рекомендации по конспектированию текста**

Конспект – краткое письменное содержание лекции, или какого-либо произведения, включающее в сжатой форме основные положения и их обоснования фактами, цифрами, примерами.

**Классификация видов конспектов**

1. План-конспект.

При создании плана - конспекта создаётся план текста, пункты плана сопровождаются комментариями. Это могут быть цитаты или свободно изложенный текст.

1. Тематический конспект.

Вышеуказанный вид конспекта является кратким изложением темы, раскрываемой по нескольким источникам.

1. Текстуальный конспект.

Данный конспект представляет изложение цитат.

1. Свободный конспект.

Данный вид конспекта включает в себя цитаты и собственные формулировки.

1. Формализованный конспект.

Записи вносятся в заранее подготовленные таблицы. Это удобно при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных объектов, явлений, процессов и т.д.

1. Опорный конспект (см. п. 4 предлагаемого методического руководства).

**Рекомендации по составлению конспекта:**

1. Определите цель составления конспекта.
2. Читая изучаемый материал в первый раз, разделите его на основные смысловые части, выделите главные мысли, сформулируйте выводы.

3. Если составляете план - конспект, сформулируйте названия пунктов и определите информацию, которую следует включить в план-конспект для раскрытия пунктов плана.

4. Наиболее существенные положения изучаемого материала (тезисы) последовательно и кратко излагайте своими словами или приводите в виде цитат.

5. Включайте в конспект не только основные положения, но и обосновывающие их выводы, конкретные факты и примеры (без подробного описания).

6. Составляя конспект, записывайте отдельные слова сокращённо, выписывайте только ключевые слова, делайте ссылки на страницы конспектируемой работы, применяйте условные обозначения.

7. Чтобы форма конспекта отражала его содержание, располагайте абзацы «ступеньками», подобно пунктам и подпунктам плана, применяйте разнообразные способы подчеркивания, используйте карандаши и ручки разного цвета.

8. Отмечайте непонятные места, новые слова, имена, даты.

9. Наведите справки о лицах, событиях, упомянутых в тексте. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля.

10. При конспектировании надо стараться выразить авторскую мысль своими словами. Стремитесь к тому, чтобы один абзац авторского текста был передан при конспектировании одним, максимум двумя предложениями.

**4. Методические рекомендации по разработке опорных конспектов**

Практика показывает, что при составлении основного конспекта эффективным будет являться параллельное составление опорного конспекта, содержащего понятийный аппарат изучаемой темы. Опорный конспект содержит основные термины и понятия изучаемой темы.

Для развития навыков активного восприятия материала представляется предпочтительным вариант, при котором студенты самостоятельно составляют опорный конспект на базе учебного материала, полученного не только на лекциях, но и почерпнутого из литературы при самостоятельной подготовке. Тогда опорный конспект может включать в себя те понятия из учебного курса, без которых студент-составитель считает усвоение всего учебного материала невозможным (либо неполным).

Преподаватель может организовать конкурс опорных конспектов по критерию самого полного или краткого, усложнённого или наиболее доступного в понимании, наиболее иллюстрированного примерами опорного конспекта и т.д. Наличие элемента игры при этом позволяет задействовать в процессе обучения и тех студентов, которые относятся скептически к изучаемой дисциплине, и тех кто в силу индивидуальных особенностей привык осваивать тот объём учебного материала, которой  достаточен  лишь для сдачи экзамена (зачёта).

Эффективность использования опорных конспектов зависит от наличия у студентов навыков их составления. Представляется целесообразным предложить методику, согласно которой студенту предлагается круг вопросов по текущей теме либо по определенной проблеме. Руководствуясь предложенным кругом вопросов, обучающийся (сначала – под руководством преподавателя, впоследствии – самостоятельно) составляет план ответа на них. В рамках составленного плана ответа определяется перечень понятий, которыми необходимо оперировать как при ответе на поставленные вопросы, так и в процессе проведения дискуссий.

Нужно отметить, что на начальном этапе рассматриваемый приём активизации процесса обучения воспринимается в качестве дополнительной нагрузки. В целях предотвращения либо нейтрализации элементов неприятия рассматриваемого приёма оказывается достаточным дать его развёрнутую характеристику (как приёма, направленного на оптимизацию процесса обучения с точки зрения самих студентов).

*Преимущества использования опорного конспекта в учебном процессе:*

1. Составление опорного конспекта (параллельно основному конспекту) стимулирует закрепление студентом полученных знаний одновременно с усвоением нового для него учебного материала, что приобретает особое значение в случаях, когда понимание каждой последующей учебной темы строится на основах предыдущей темы. При этом студент воспринимает учебный предмет как стройную систему взаимосвязанных и взаимообусловленных знаний, что принципиально необходимо для успешного обучения.

Закрепление полученных знаний обеспечивается многократностью обращения к опорному конспекту в течение всего периода обучения. Стимулировать такие обращения возможно проведением частых мини-опросов, требующих знаний в определении нескольких уже изученных понятий. Свободное владение понятийным аппаратом, обеспеченное проработкой опорного конспекта, значительно упрощает подготовку кратких тематических сообщений для семинарских занятий, подготовку к контрольным работам, зачётам и т.д.

 2. Краткость в изложении и ёмкость содержания опорного конспекта позволяют без особых усилий обращаться к нему много раз в течение всего периода обучения. Коэффициент полезного действия работы с опорным конспектом повышается «эффектом записной книжки», когда по одному или нескольким терминам из понятийного аппарата определенной учебной темы возможно восстановление в памяти основного объёма материала, изученного по теме. Для этого от студента не требуется специальных затрат труда и времени, на недостаток которого в равной степени ссылаются, пытаясь оправдать свою неподготовленность обучающиеся.

1. Не менее важным представляется и то, что применение в процессе обучения студентами понятийного аппарата позволяет наладить общение студентов с преподавателем, а также друг с другом на уровне осмысленного использования полученных знаний. Такой уровень общения становится необходимым и достаточным условием для эффективного осуществления исследовательской деятельности студентов. Обеспеченный таким образом уровень общения позволяет проводить занятия с применением приёмов методологии изучаемой дисциплины, постановкой открытых вопросов и продуктивного поиска вариантов ответов на них, а также в иных формах, требующих активного применения полученных знаний.

**Примерные темы опорных конспектов:**

* *Векторы, действия над векторами*
* *Свойства функций непрерывных на отрезке*
* *Дифференциальные уравнения второго порядка*
* *Интегрирование простейших рациональных дробей*

**5. Методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ**

Расчетно-графическая работа по математическим дисциплинам - важный момент учебного процесса, способствующий подготовке специалистов.

Цель расчетно-графической работы – углубить знания студентов, полученные ими в ходе теоретических и практических занятий, привить им навыки системного подхода при самостоятельном изучении и анализе данных, а также научить подбирать, изучать и обобщать материалы литературных источников.

Расчетно-графическая работа позволяет студентам проявить инициативу и в выборе самого широкого круга дополнительной информации по намеченной теме (помимо конспектов лекций и обязательных учебников), и в изучении тех разделов курса, которые в ходе занятий рассматривались лишь в ограниченной степени. Она приобщает студентов к исследовательской работе. Студентов подготовка и защита расчетно-графической работы обогащает опытом и знаниями, необходимыми им при выполнении дипломных работ.

*Задачами расчетно-графической работы является*:

- систематизация, закрепление и расширение полученных в колледже теоретических и практических знаний;

- развитие навыков самостоятельной работы и овладение методикой системного исследования при решении рассматриваемых проблемных вопросов;

- выявление степени подготовленности студентов для самостоятельной практической работы по специальности.

В результате выполнения и защиты студентами индивидуальных расчетно-графических работ преподаватель получает достаточно полную информацию о ходе усвоения учебного материала в целом, а также и об усвоении отдельных тем или вопросов. Кроме того, выполнение расчётно-графических работ позволит студентам активно применять полученные на лекциях знания, как в процессе обучения, так и в своей будущей самостоятельной работе.

В расчетно-графической работе от начала до конца должна четко прослеживаться логическая связь выполняемых операций, а также должны быть отмечены основания для выполнения этих операций. Приведенные в настоящей методической разработке примеры решения отдельных задач могут послужить основой для оформления работы. Формулы, теоремы, используемые в работе, должны быть, как правило, записаны сначала в общем виде, а затем уже должна быть произведена подстановка исходных данных и выполнены необходимые вычисления. Текст всей работы должен быть выдержан в единой стиле; например, если пояснения ведутся в безличной форме, то эта форма должна сохраняться во всей работе.

Каждым студентом все расчетно-графические работы должны выполняться и сдаваться на проверку преподавателю в сроки, предусмотренные графиком работы студентов в текущем семестре. После исправления студентом всех ошибок, отмеченные преподавателем при проверке, каждая расчетно-графическая работа должна быть защищена.

***Виды самостоятельной работы:***

* *Выполнение расчетно-графической работы «Исследование функции и построение графика»*
* *Выполнение расчетно-графической работы «Определение объемов тел вращения»*

**6. Методические рекомендации по созданию презентаций**

**Презентация** – это мультимедийное представление информации по определенной теме.

Создание презентаций позволяет студенту критически осмысливать потоки информации, понимать ее суть, способствует вычленять главное. Создание презентации дает студенту неограниченные возможности для творчества в использовании информации в любой форме представления, в компоновке материала в соответствии с целями, задачами.

Умение работать с информацией повышает конкурентоспособность студента первоначально в образовательной среде, а впоследствии и в сфере его профессиональной деятельности. Кроме этого вырабатывается способность к самосовершенствованию, самостоятельному поиску.

При создании студентами компьютерных презентаций, формируются важнейшие в современных условиях навыки:

-     критическое осмысление информации;

-     выделение главного в информационном сообщении;

-     систематизирование и обобщение материала;

-     грамотное представление имеющейся информации.

Работа над презентацией, ее публичное представление, защита положительно влияет на развитие у студентов навыков общения с помощью информационно-компьютерных технологий, дает дополнительную мотивацию к изучению дисциплины, способствует повышению уровня восприятия информации презентаций, используемых преподавателем на занятиях.

*Логическая последовательность создания презентации:*

1. Структуризация материала.
2. Составление сценария презентации.
3. Разработка дизайна.
4. Подготовка медиафрагментов (аудио, видео, анимация, текст).
5. Проверка на работоспособность всех элементов презентации.

**Рекомендации по применению мультимедийных презентаций:**

1. Слайды презентации должны содержать только основные моменты материала (основные определения, схемы, анимационные и видеофрагменты, отражающие сущность изучаемых явлений).
2. Общее количество слайдов не должно превышать 20 – 25.
3. Не стоит перегружать слайды различными спецэффектами, иначе внимание будет сосредоточено именно на них, а не на информационном наполнении слайда.
4. На уровень восприятия материала большое влияние оказывает цветовая гамма слайда, поэтому необходимо позаботиться о правильной расцветке презентации, чтобы слайд хорошо «читался», нужно чётко рассчитать время на показ того или иного слайда. Это гарантирует должное восприятие информации.

**Основные правила подготовки мультимедийной презентации:**

При создании мультимедийного пособия не следует увлекаться и злоупотреблять внешней стороной презентации, так как это может снизить эффективность презентации в целом. Необходимо найти правильный баланс между подаваемым материалом и сопровождающими его мультимедийными элементами, чтобы не снизить результативность материала.

Одним из важных моментов является сохранение единого стиля, унифицированной структуры и формы представления учебного материала. Для правильного выбора стиля потребуется знать принципы эргономики. При создании мультимедийного пособия стоит ограничиться использованием *двух или трех шрифтов*. Вся презентация должна выполняться в одной цветовой палитре, например на базе одного шаблона, также важно проверить презентацию на удобство её чтения с экрана.

Тексты презентации не должны быть большими. Выгоднее использовать сжатый, информационный стиль изложения материала.

При подготовке мультимедийных презентации возможно использование ресурсов сети Интернет, современных мультимедийных энциклопедий и электронных учебников. Удобным является тот факт, что мультимедийную презентацию можно будет дополнять новыми материалами, для её совершенствования, тем более что современные программные и технические средства позволяют легко изменять содержание презентации и хранить большие объемы информации.

Следует отметить тот факт, что самостоятельное создание презентаций на заданную тему приводит к целому ряду последствий:

1. Происходит повышение уровня освоения учебного материала.
2. Устанавливается прочная межпредметная связь с информатикой.
3. Студент, создающий и использующий мультимедийные презентации, вынужден обращать огромное внимание на логику подачи материала, его структурирование.

***Требования к оформлению презентаций***

*Требования к расположению информации*

1. Горизонтальное расположение информации.
2. Наиболее важная информация в центре экрана.
3. Комментарии к картинке располагать внизу.

*Требования к шрифтам*

1. Размер заголовка не менее 24 пунктов, остальной информации не менее 20 пунктов.
2. Не более двух -  трех типов шрифтов в одной презентации.
3. Для выделения информации использовать начертание: полужирный шрифт, курсив или подчеркивание.

 Необходимо использовать так называемые рубленые шрифты (например, различные варианты Arial или Tahoma), причем размер шрифта должен быть довольно крупный. Предпочтительно не пользоваться курсивом или шрифтами с засечками, так как при этом иногда восприятие текста ухудшается. В некоторых случаях лучше писать большими (заглавными) буквами (тогда можно использовать меньший размер шрифта). Иногда хорошо смотрится жирный шрифт.

*Способы выделения информации.*

1. Рамки, границы, заливка.
2. Различный цвет шрифта, ячейки, блока.
3. Рисунки, диаграммы, стрелки, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов.

Важно подобрать правильное сочетание цветов для фона и шрифта. Они должны контрастировать, например, фон – светлый, а шрифт – темный, или наоборот. Первый вариант предпочтительнее, так как текст читается лучше.

*Объем информации и требования к содержанию*

1. На одном слайде не более трех фактов, выводов, определений.
2. Ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.

Слайды не надо перегружать ни текстом, ни картинками. Лучше не располагать на одном слайде более 2 – 3 рисунков, так как иначе внимание слушателей будет рассеиваться. Не стоит вставлять в презентации большие таблицы: они трудны для восприятия — лучше заменять их графиками, построенными на основе этих таблиц. Если все же таблицу показать необходимо, то лучше оставить как можно меньше строк и столбцов, привести только самые необходимые данные. Это также позволит сохранить необходимый размер шрифта.

**Виды самостоятельной работы**

* *Подготовка презентации «Применение систем линейных уравнений»*
* *Подготовка презентации «Физический и геометрический смысл производной».*
* *Подготовка презентации по теме «Применение степенных рядов в приближенных вычислениях»*
* *Подготовка сообщения «Применение частных производных»*
* *Подготовка презентации «Классификация поверхностей второго порядка в прямоугольной системе координат»*

**7. Методические рекомендации по составлению, заполнению обобщающих таблиц, схем**

Одним из приемов систематизации и обобщения знаний является составление и заполнение таблиц, блок-схем, логических цепочек.

Их регулярное применение позволяет сформировать у студентов умения устанавливать логические связи между понятиями, тем самым развивает логическое мышление, выступает средством предупреждения и ликвидации формализма в знаниях учащихся, позволяет сформировать такую систему знаний, которая представляется как динамичная, качественно изменяющаяся.

Применяя различные приёмы систематизации и обобщения знаний, преподаватель может разнообразить самостоятельную работу студентов, тем самым поддерживать интерес к изучаемой дисциплине. Кроме того, эти приёмы носят общепредметный характер, следовательно, их применение способствует развитию общеучебных навыков: работа с текстом, проведение структурного анализа материала, составление планов, конспектов, установление связей и отношений между понятиями и представление их в наглядной форме в виде схем, таблиц, логических цепочек рассуждений. Математика как никакая другая наука позволяет в полной мере сформировать эти навыки.

Особое внимание стоит уделить таблицам, так как их использование позволяет: развивать логическое и аналитическое мышление, память, формировать умения самостоятельно проводить обобщение знаний, что способствует повышению прочности и осознанности знаний.

Формирование навыка работы с таблицами необходимо начинать как можно раньше: на первом этапе - это заполнение предложенных таблиц, в дальнейшем - их самостоятельное составление.

При регулярной работе с таблицами студенты прекрасно сами формулируют алгоритм создания таблиц:

* Выделить объекты.
* Выделить свойства объектов.
* Объекты и их свойства разнести по столбцам и строкам.
* Заполнить составленную таблицу.

Однако все таблицы должны отвечать определённым требованиям: лаконичность и наглядность. По характеру материала таблицы можно разделить на систематизирующие и сравнения. В систематизирующих таблицах можно объединить величины, характеризующие определённый класс явлений или других понятий одного вида. В таблицах сравнения можно сопоставить или ограничить схожие понятия.

Таблица, может служить средством соотнесения конкретных изучаемых вопросов с содержанием всего раздела, осознания структуры изучаемой темы целиком. Анализируя содержание таблицы, студент может оценивать вес каждого изучаемого вопроса, более чётко представить процесс изучения раздела целиком.

Студенты могут заполнить таблицу непосредственно по мере изучения нового материала: таблица может служить итогом самостоятельного изучения материала, результатом семинарского занятия или практикума.

При обобщении и систематизации знаний таблица может служить средством подведения итогов изучения темы. Повторяя основной пройденный материал, студенты самостоятельно могут заполнить предложенную таблицу, либо могут сами составить таблицу, блок-схему основных понятий по изученной теме.

Кроме того, таблица, блок-схема может быть частью опорного конспекта и служить опорой для самостоятельного изучения темы и расширения знаний.

**Виды самостоятельной работы**

* *Заполнение таблицы «Виды уравнения прямой на плоскости»*
* *Составление таблицы «Канонические уравнения кривых второго порядка и их характеристики»*
* *Заполнение обобщающей таблицы «Основные элементарные функции»*
* *Составление таблицы «Дифференциальные уравнения первого порядка и способы их решения»*

**Таблица 3. Уравнения прямой на плоскости**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Способ задания | Уравнение прямой с угловым коэффициентом | Общее уравнение прямой | Каноническое уравнение прямой | Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении | Уравнение прямой, проходящей через две точки | Уравнение прямой в отрезках | Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярную данному вектору |
| **Общий вид уравнения** |  |  |  |  |  |  |  |
| **Вспомогательные понятия** | k – угловой коэффициент  k = tg α =  = (y – b) / x – тангенс угла наклона прямой к оси ОХ | А, В, С – произвольные числа.  А и В не равны одновременно нулю. | *Направляющий* *вектор* – \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *Каноническое уравнение прямой* – \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | - | х1 ≠ х2  у1 ≠ у2 | a, b – числа, которые отсекает прямая на осях координат | *Нормальный вектор прямой* – \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  А,В – координаты вектора |
| **Схематический график** |  |  |  |  |  |  |  |
| **Частные случаи** | 1. Если **b = 0**  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  k>0 k<0  2. Если **α = 0**      B(0; b)  3.Если α = π/2, то \_\_\_\_\_\_\_ , т. к. tgπ / 2 не существует. | **1**. А = 0 ⇒  **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**  прямая параллельная оси Ох.  **2**. В = 0 ⇒ **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ –** прямая параллельная оси Оу  **3**. С = 0 ⇒  **Ах + Ву = 0** ⇒**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ –** прямая, проходящая через начало координат **k = - A/B**  **4.** A =C = 0 ⇒  **\_\_\_\_\_\_ –** прямая совпадает с осью Ох  **5.**В = С = 0 ⇒  **\_\_\_\_\_ –** прямая, совпадающая с осью Оу |  | Если в уравнении k – произвольное число, то уравнение определяет \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, проходящих через точку M0(х0;у0), кроме прямой параллельной оси Оу, т. к. не существует угловой коэффициент.  У  х = х0 –  прямая не входящая в пучок  т. М0 – центр пучка | Если х2 = х 1, то уравнение **х = х1**  прямая параллельная оси Оу.  Если у2 = у 1, то уравнение **у = у1**  прямая параллельная оси Ох. |  |  |

**Обобщающая таблица 4. Основные элементарные функции и их характеристики**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Степенная функция**  ***у = х а*** | | | | | | |
| Обозначение | ***у = х*** (*а* = 1) | ***у* = *х* 2** (*а* = 2) | | ***у* = *х*3 (*а* = 3)** | | ***у* = √*х* (*а* = ½)** | |
| Область определения |  |  | |  | |  | |
| Множество значений |  |  | |  | |  | |
| Четность, нечетность |  |  | |  | |  | |
| Монотонность (промежутки возрастания и убывания функции) |  |  | |  | |  | |
| Периодичность |  |  | |  | |  | |
| График функции  ( название) | 0  y  y = kx  x | y  0  x  Y = x2 | | x  0  y = x3  y | | y  y = √x  x | |
|  | **Степенная функция**  ***у = х а*** | | | **Показательная функция** | | **Логарифмическая функция** | |
| Обозначение | ***у* = 1/*х*(*а* = –1)** | | ***у* = 1/*х* 2 (*а* = -2)** | ***у* = *а* х** | | ***у = loga x*** | |
| Область определения |  | |  |  | |  | |
| Множество значений |  | |  |  | |  | |
| Четность, нечетность |  | |  |  | |  | |
| Монотонность (промежутки возрастания и убывания функции) |  | |  |  | |  | |
| Периодичность |  | |  |  | |  | |
| График функции  ( название) | 0  y = 1/x2  y  x  0  y  y = 1/x  x | |  | 1  0  y = ax  0 < a < 1  y  y= ax  a > 1  х | | y  у = logax, a >1  у = logax, <a<1 | |
|  | **Тригонометрические функции** | | | | | | |
| Обозначение | ***y* = sin *x*** | | ***y* = соs *x*** | | ***y* = tg *x*** | | ***y* = ctg *x*** |
| Область определения |  | |  | |  | |  |
| Множество значений |  | |  | |  | |  |
| Четность, нечетность |  | |  | |  | |  |
| Монотонность (промежутки возрастания и убывания функции) |  | |  | |  | |  |
| Периодичность |  | |  | |  | |  |
| График функции  ( название) | 0  х  π  –1  ─π  у  1 | | –1  –π/2  π/2  у  х  0 | | 0  3π/2  *х*  –π/2  π/2  у | | π  *х*  –π  0  у |

**8. Индивидуальная самостоятельная работа в виде решения задач, проблемных ситуаций**

**Задача** — это цель, заданная в определенных условиях, решение задачи — процесс достижения поставленной цели, поиск необходимых для этого средств.

Решение задачи фактически сводится к использованию сформированного мыслительного действия, воспроизводству готового знания. Такой вид мышления называют репродуктивным.

Алгоритм решения задач:

1. Внимательно прочитайте условие задания и уясните основной вопрос, представьте процессы и явления, описанные в условии.
2. Повторно прочтите условие для того, чтобы чётко представить основной вопрос, проблему, цель решения, заданные величины, опираясь на которые можно вести поиски решения.

3. Произведите краткую запись условия задания.

Если необходимо составьте таблицу, схему, рисунок или чертёж.

Определите метод решения задания, составьте план решения.

Запишите основные понятия, формулы, описывающие процессы, предложенные заданной системой.

Найдите решение в общем виде, выразив искомые величины

через заданные.

Проверьте правильность решения задания.

Произведите оценку реальности полученного решения.

Запишите ответ.

**Проблема** - вид интеллектуальных задач, характеризующийся отсутствием готовых средств решения.

Алгоритм решения проблемной ситуации:

1. Осознание проблемной ситуации.

2. Анализ условий, выделение того, что известно, и того, что неизвестно, в результате чего проблема превращается в задачу.

3. Ограничение зоны поиска.

Формулирование гипотез как предположения о способах решения задачи.

Реализация гипотезы.

Проверка, в которой гипотеза соотносится с исходными условиями. Если проверка подтверждает гипотезу, то осуществляется реализация решения. Если нет — то процесс решения продолжается снова и происходит до тех пор, пока решение не будет окончательно согласовано с условиями задачи.

**Виды самостоятельной работы и примеры решения задач**

**Раздел I. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии**

**Тема 1.** **«Основные сведения о матрицах »**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Найдите матрицу С = А + В, где А= и В = .

* Решение. Чтобы найти сумму двух матриц необходимо сложить их соответствующие элементы.

С = .►

***Пример 2*.** Найдите произведение матриц А = и В = .

* Решение. Произведение матриц существует, так как число столбцов первой матрицы равно числу строк второй . Определим вначале элемент с11 – это сумма произведений элементов 1-й строки первой матрицы - А на элементы 1-го столбца второй матрицы - В:

С11= 1∙1+ 3∙3 = 10,

аналогично находятся остальные элементы (например, элемент с23 – это сумма произведений элементов второй строки матрицы А на элементы третьей строки матрицы В).

.►

***Пример 3.*** Транспонируйте матрицу А.

* Решение. Поменяем строки и столбцы местами, сохраняя порядок элементов:

А = .►

***Пример 4***. Умножьте матрицу А =  на число k = 3.

* Решение. Умножая каждый элемент матрицы А на 2, получим

2А = 2⋅= =.►

**Задания для самостоятельной работы**

1.1 Найдите линейные комбинации матриц

1.2. Найдите 3А + 2В , если А = , В = .

1.3. Найдите матрицу Х, удовлетворяющую условию 3А + 2Х = Е, если

А = .

1.4. Найдите произведения матриц, если они существуют



;  .

1.5. Выясните, существуют ли произведения АВ и ВА для данных матриц, и, если они существуют, найдите их: А = , В = .

1.6. Вычислите матрицу D = ( AB) – C2 , где А =, В = , С =1.7. Найдите произведение матриц АВС, где А = , В =, С = .

1.8. Найдите значение f(A) , если f(x) = 3x2 – 2x + 4 и А = .

1.9. Найдите значение f(A) , если f(x) = 2x2 + 3x - 5 и А = .

1.10. Транспонируйте следующие матрицы

А = , В = , С = , Д = .

1.11. Вычислите матрицу D=ABC–3E, если А =, В =, С =().

1.12. Вычислите АВ – ВА, если

*а)* А = , В = ; *б)* А = , В = .

*в)* А **= ,** В **= ;** *г)* А **= ,** В **= .**

**Тема 2. «Определители квадратных матриц»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Вычислить определитель матрицы второго порядка .

* Решение. Δ =  = 2 ⋅ 5 – 3 ⋅ 1 = 7. ►

***Пример 2****.* Вычислить определитель матрицы .

* Решение. По формуле Сарруса вычисляем определитель третьего порядка.

Δ =  = 1⋅1 ⋅(–3) + 2⋅1⋅(–2) + 3⋅0⋅3 – 3⋅1⋅(–2) – 0⋅1⋅1 – 3⋅2⋅(–3) = 17. ►

***Пример 3.*** Найти алгебраические дополнения элементов *а13,  а21, а32*матрицы



* Решение. А13 = (-1)***1 + 3***  =  = – 4 – 0 = – 4,

А21 = (-1)***2 + 1***  = –  = – (10 – (– 2)·1) = – 12,

А32 = (-1)***3 + 2***  = –  = – ((–1)∙ 3 – 1∙ 2) = 5. ►

***Пример 4.*** Вычислить определитель матрицы

.

* Решение. Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т.к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю и, применяя теорему Лапласа, записывают:

 = 3∙122. ►

***Пример 5.*** Найти матрицу обратную матрице А.



* Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы ⏐А⏐ = 5 ≠ 0 - матрица невырожденная, значит, существует обратная.

2. Транспонируем матрицу 

3. Находим алгебраические дополнения всех элементов транспортированной матрицы.

А11 = (-1) ***1 + 1***  = 1, А12 = (-1)***1 + 2***  = 3, А12 = (-1)***1 + 3***  = -2,

А21 = (-1)***2 + 1***  = -3, А22 = (-1)***2 + 2***  = 1, А23 = (-1)***2 + 3***  = 1,

А31 = (-1)***3 + 1***  = 1, А32 = (-1)***3 + 2***  = -2, А33 = (-1)***3 + 3***  = 3.

4. Тогда присоединенная матрица имеет вид: 

Обратная матрица ►

***Пример 6*.** Найти ранг матрицы .

* Решение. По свойству 1 (имеется нулевой столбец) все миноры третьего порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка отличный от нуля:

, значит r(A) = 2. ►

***Пример 7.*** Решите матричное уравнение .

* Решение. Запишем матричное уравнение в виде *АХ = В.* Умножим обе части уравнения слева на *А – 1* (если существует матрица и выразим *А – 1*) и выразим *Х.*

1. Найдем определитель матрицы А: Δ = – 1 ≠ 0, значит матрица невырожденная и существует обратная, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.
2. Найдем обратную матрицу *А – 1* = 
3. Найдем неизвестную матрицу .►

**Задания для самостоятельной работы**

2.1. Вычислите определители второго порядка.

а) , б) , в) , г) , д) .

2.2. Вычислите определители третьего порядка (методом треугольников).

а) , б) , в) , г) , д) 

2.3. Вычислите определители 3 – го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу

а) , б) , в) , г) , д) .

2.4. Вычислите определители 4 – го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу

а) А = , б) А =  в) А = .

2.5. Найдите матрицы обратные к данным 

2.6. Определите, имеет ли матрица обратную, и если имеет, вычислите её.

а)А = , б)А = , в)А = , г)А = .

2.7. Вычислите матрицу в = 3А-1 + А′ , где А = .

2.8. Вычислите матрицу в = 5 А-1 – А , где А = .

2.9. Найти ранги матриц а)А =, б)А=, в)А = .

2.10. Найдите матрицу Х, удовлетворяющую уравнению:

а) , б) , в) .

**Тема 3. «Системы линейных уравнений»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Исследовать на совместность систему *х* + у = 1,

3*х* + 3у = - 2.

* *Решение.* А = , ранг данной матрицы r(A) = 1, тогда расширенная матрица  имеет ранг r() = 2 .

Таким образом, r(A) ≠ r(), следовательно, система несовместна. ►

***Пример 2*.** Решить систему уравнений методом обратной матрицы *x* – y + z = 3,

2*x* +y +z =11,

*x*+y +2z = 8.

* *Решение*. Обозначим .

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: А⋅Х = В. Найдем определитель |A| = 5 ≠ 0, значит матрица А – невырожденная, и существует обратная А- 1. Обратную матрицу находим по алгоритму (см. предыдущую тему).

.

Теперь по формуле Х = А-1В = ,

т.е. решение системы (4; 2; 1). ►

***Пример 3*.** Решить систему уравнений методом Крамера 3x + 2y + z = 3,

5x – 2y – 2z = 3,

x + y – z = –2.

* *Решение*. Найдем определитель системы (правилом треугольников или по теореме Лапласа) Δ = 25. Так как Δ ≠ 0, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц Δ1 , Δ2 , Δ3 , полученных из матрицы А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

.

Теперь по формулам Крамера найдем значения неизвестных

,

т.е. решение системы (1; – 1; 2). ►

***Пример 4*.** Решить систему уравнений методом Гаусса. 2*х*1 + 3*х*2 – *х*3 = 4,

*х*1 + *х*2 + 3*х*3 = 5,

3*х*1 – 4*х*2 + *х*3 = 0.

* Решение. Составляя расширенную матрицу можно выполнить первое преобразование системы, поставив на первое место уравнение, в котором коэффициент при х1 равен 1.

Расширенная матрица системы имеет вид .

Проведем элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы:

т.к. *а*11 ≠ 0, то умножая (мысленно) первую строку матрицы на числа (-2), (-3) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй и третьей, исключим переменную х1 из всех строк начиная со второй. Складываем вторую и третью строки, исключаем переменную х3.

~

|  |  |
| --- | --- |
| Умножим мысленно элементы второй строки на 7, и, сложив их с элементами 3-ей строки, исключаем переменную х3 | ~ |
| Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений | *х1 + х2 + 3х3 = 5,*  *х2 – 7х3 = – 6,*  *– 57х3 = – 57.* |

Решением системы будут неизвестные х1 = 1, х2 = 1, x3 = 1. ►

***Пример 5.*** Решить систему линейных уравнений *х1 + х2 – х3* = – 4,

*х1 + 2х2 – 3х3* = 0,

*– 2х1  –х3* = 3.

* Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы, умножив 1-ую строку на –1 и сложив ее со 2-ой, исключим 1-ый элемент второй строки. Затем, умножив 1-ую строку на 2, прибавим ее к третьей, таким образом, элемент а13 = 0.

 ~ 

Умножив 2-ую строку на –2 и сложив с 3-ей строкой, получим .

Данная система уравнений несовместна т.к. последней строке расширенной матрицы соответствует уравнение 0∙х1 + 0∙х2 + 0∙х3 = – 13, не имеющее решений. ►

**Задания для самостоятельной работы**

3.1. Решите данные системы уравнений матричным методом.

х – у + z = 3, 2х – у + z = 0, х + 2у + z = 8,

а) 2х + у + z = 11, б) 3х – 2у – z = 5, в) –2х + 3у –3z = –5,

х + у+ 2z = 8. х + у + z = 6. 3х – 4у + 5 z = 10.

х + 2у – 4z = –7, 2х + 4у + z = 4, 4х – 3у + 2z = 9,

г) 2х – 3у + 5z = 11, д) 3х + 6у + 2z = 4, е) 2х + 5у – 3z = 4,

3х – у + 5z = 16. 4х – у – 3z = 1. 5х + 6у – 2z = 18.

* 1. Найдите решения данных систем уравнения по формулам Крамера.

х + у – 2z = 6, 2х + 3у – z = 4, 4х + 2у – z = 0,

а) 2х + 3у – 7z = 16, б) х + у + 3z = 5, в) х + 2у +z = 1,

5х + 2у+ z = 16. 3х – 4у + z = 0. у – z = –3.

3х + 2у + z = 1 х + у + z = –2, 3х + 2у + z = – 8,

г) 6х + 5у + 4z= –2, д) 2х – 3у – z = – 6, е) 2х + 3у + z = –3,

9х + 8у + 7z = 3. 3х + 4у + 3z = –5. 2х + у + 3z = –1.

3.3. Найдите решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

х +2у +3z = 1, х + 5у + z = 0, 3х + 2у + 5z = –10,

а) 5х + 8у – z = 7, б) 2х – 4у – 3z = –1, в) х + 3у – 6z = 12,

2х – 3у+ 2z = 9. 3х + 4у + 2z = 8. 2х + 5у – 3z = 6.

3х + у + z = 8, х – у – 3z = 13, 3х – 5у+ 2z– 4t = 0,

г) 2х – 3у + 2z= 2, д) 2х + у – z = 0, е) –3х + 4у – 5z + 3t= ­–2,

х + 2у – z = 2. 3х – 2у + 4z = –15. –5х+ 7у – 7z + 5t = –2,

8х – 8у + 5z– 6t = –5.

х – 2у+ t = – 3, 2х + 3у+ 11z+ 5t = 2,

ж) 3х – у– 2z= 1, з) х + у+ 5z+ 2t = 1,

2х + у– 2z– t = 4, 2х + у + 3z+ 2t = – 3,

х + 3у– 2z– 2t = 7. х + у+ 3z+ 4t = – 3.

* 1. Обувная фабрика специализируется по выпуску трех видов обуви: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырьё трех типов: S1, S2, S3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объём расхода сырья на 1 день заданы таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид сырья | Нормы расхода сырья на одну пару, у.е. | | | Расход сырья на один день, у.е. |
| Сапоги | Кроссовки | Ботинки |
| S1 | 5 | 3 | 4 | 2700 |
| S2 | 2 | 1 | 1 | 800 |
| S3 | 3 | 2 | 2 | 1600 |

Найдите ежедневный объём выпуска каждого вида обуви.

**Тема 4. «Векторы. Действия над векторами»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Даны вектора (2; –1; 2) и (8; – 4; 0). Найдите .

* Решение. = (8 – 2; – 4 – (–1); 0 – 2) = (6; ­­– 3; – 2).

Находим длину вектора по формуле .►

***Пример 2.*** Разложите вектор  по координатным ортам и , если А (1; 3) и

В (4; 2) .

* Решение.  = (4 – 1)  + (2 – 3)  = 3 –  – разложение вектора  по координатным ортам. ►

***Пример 3.*** Докажите, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин А(–4;–4;4), В(–3;2;2),C(2;5;1), D(3;–2;2), взаимно перпендикулярны.

* Решение. Составим вектора  и , лежащие на диагоналях данного четырех угольника. Имеем: =(6;9;–3) и =(6;–4;0). Найдем скалярное произведение этих векторов:  · = 36 – 36 = 0. Отсюда следует, что  ⊥ . Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. ►

***Пример 4.*** На оси абсцисс найдите точку, которая находится на расстоянии 5 единиц от точки М(1; 3).

* Решение. Обозначим искомую точку через А(х; 0), т.к. по условию она лежит на оси абсцисс. Тогда длина отрезка АМ выражается формулой

, откуда подставляя в нее координаты точек и известное расстояние, имеем . Возведем обе части этого равенства в квадрат, а затем раскроем скобки и приведем подобные члены: .

Решив квадратное уравнение получим корни *х1 = – 3* и *х2 = 5*. Итак, получаем две точки: А1(– 3; 0), А2(5; 0).

– 3

5

0

х

у

5

5

М(1;3)

А1

А2

. ►

**Задания для самостоятельной работы**

1. Начертите два неколлинеарных вектора  и  и постройте векторы :



1. Даны векторы . Найдите: .
2. Найдите координаты векторов , если А(1; 3), В(– 1; –3), С(– 7; 5).
3. Найдите разложение вектора АВ по координатным ортам и его длину, если:

а) А (–4 ; 1), В (–1; 4); б) А ( 2; 3), В (2; –3); в) А (0; –2) , В (1; 0) .

1. На оси ординат найдите точку, которая находится на расстоянии 13 единиц от точки М(12; 14).
2. Пусть ABCDA1B1C1D1 – четырехугольная призма. Рассмотрим все ненулевые векторы с концами в вершинах этой призмы: а) Какие векторы сонаправлены с вектором АА1? б) Какие векторы противоположны вектору AD? в) Какие векторы коллинеарные вектору АВ? г) Компланарны ли векторы А1С1 , BD и CA1?
3. В равностороннем треугольнике АВС со стороной, равной 6, найдите скалярное произведение векторов: а)  и ; б)  и .
4. Постройте параллелограмм на векторах ОА = (1; 1; 0) и ОВ = ( 0; –3; 1 ) и определите диагонали параллелограмма ОС и АВ и их длины.
5. Даны векторы . Найдите: .
6. Вычислите скалярное произведение векторов и  найдите угол φ, если

= (2; –1; –2) и  = (–8; 1; 4).

1. Найти проекцию вектора а = (5; –6; 2) на ось сонаправленную с вектором

b = (–2; 2 ; 1 ).

1. Найдите середину отрезка, заданного точками А (3; –7; 11), В (– 1; 2; – 3).
2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: А (1; –2; 3),

В (3; 2; 1), С (6; 4; 4). Найдите его четвертую вершину.

1. Найдите периметр треугольника с вершинами А (3; –2; 8), В (1; 0; 6),

С (5; 1; – 7).

1. Найдите длину медианы АМ с вершинами А (2; –2; 0), В (7; – 3; 1), С (1; –1; 5).
2. Даны точки А (2; 4; –2) и В (–2; 4; 2). На прямой АВ найдите точку С, делящую отрезок АВ в отношении λ = 3.
3. Даны точки А (3; 3; 3) и В (–1; 5; 7). Найдите координаты точек С и К, делящих отрезок АВ на три равные части.
4. На сторонах ОА и ОВ прямоугольника ОАВС отложены единичные векторы i и j . Точка М – середина стороны ВС, N – середина стороны АС. Выразите через векторы i и j векторы ОА, АС, ВО, ОС, ОМ, ОN, МN , если | OA | = 3 , | OB | = 4.
5. В каком отношении точка М, равноудаленная от точек А (3; 1; 4) и В (–4; 5; 3), разделит отрезок оси Оу от начала координат до точки С (0; 6; 0).
6. Найдите точку пересечения медиан треугольника АВС, где А (1; 4; – 3),

В (2; – 1; 9), С (0; 3; – 6).

**Тема 5. «Линии на плоскости»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Лежат ли точки К (–2; 1) и С (1; 1) на линии *2х + у + 3 = 0*?

* Решение. Подставив в уравнение координаты точки К, получим 2(–2) + 1 +

+ 3= 0. Следовательно, точка К лежит на данной линии. Точка С не лежит на данной линии т. к. 2⋅1 + 1 + 3 ≠ 0. ►

***Пример 2.*** Найти расстояние от точки М0(2; –1) до прямой 3*х* +4у – 22 = 0.

* Решение. По формуле расстояния от точки до прямой получаем

.**►**

***Пример 3.*** Известны точка М(7; – 8) и нормальный вектор прямой . Составьте уравнение прямой.

* Решение. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору имеет вид A(x – x0) + B(y –y0) = 0. В данном случае координаты (x0; y0) – это координаты точки М, т.е. x0 = 7, а y0 = – 8. Значения А, В – это координаты нормального вектора прямой, т.е. А = – 2, В = 3, подставим эти значения в уравнение прямой: – 2(x – 7) + 3(y –(– 8)) = 0,

откуда 2х – 14 + 3у + 24 = 0 ⇒ 2х + 3у + 10 = 0 – искомое уравнение прямой в общем виде. ►

***Пример 4.*** Треугольник задан точками А(5; 2), В(–1; – 4) и С (–5;–3). Составьте уравнение прямой, проходящей через точку В параллельно АС.

* Решение. Т.к. искомая прямая параллельна стороне АС, найдем координаты вектора  = (– 10; – 5), который будет направляющим вектором искомой прямой. Подставим координаты точки В и координаты направляющего вектора в каноническое уравнение прямой: ,

откуда х + 1 = 2у + 8 ⇒ х – 2у – 7 = 0 – искомое уравнение в общем виде. ►

***Пример 5.*** Постройте прямую 5х – 3у = – 15.

|  |  |
| --- | --- |
| * Решение. Преобразуем уравнение, разделим левую и правую часть равенства на – 15: .   Полученное уравнение – уравнение прямой в отрезках. Значит, на оси абсцисс откладываем – 3 единицы, а на оси ординат 5 единиц и проведем прямую. ► | 0  *х*  –3  у  5 |

***Пример 6.*** Уравнение прямой *4х – 3у 12 = 0* представить в различных видах ( с угловым коэффициентом, в отрезках).

* Решение. Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно *у*. Получим

*3у = 4х + 12* ⇒  – уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь k = , b = 4.

Для получения уравнения в отрезках перенесем свободный член С = 12 вправо и разделим обе части уравнения на – 12. В результате получим 

уравнение прямой в отрезках на осях, здесь *а* = –3, b = 4. ►

**Задания для самостоятельной работы**

5.1. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку М0(–5; 2) и параллельной вектору, соединяющему точки М1(1; –1) и М2(3; 2).

5.2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(–1;3) и перпендикулярной вектору n = (2; –3).

5.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку С(5; –6) перпендикулярно вектору n=(–3;8).

5.4. Даны точки А(8;–4) и В(16;20). Составьте уравнение прямой , проходящей через точку А и перпендикулярно вектору АВ.

5.5. Вершинами треугольника служат точки А(–3;–1), В(2;7) и С(5;4). Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину С перпендикулярно стороне АВ.

5.6. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(2; 4), В(6; 3) и С (4;–3). Составьте уравнение медианы АD.

М

у

х

5.7. Составьте уравнение прямой, если точка М(2;3)

является серединой ее отрезка, заключенного между

осями координат.

5.8. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(–4; 1) параллельной прямой 4х – 3у + 7 = 0 .

5.9. Даны вершины треугольника А(–2; 1), В(0; 5) и С(2; –4). Составьте уравнение высоты, проведенной из вершины С.

5.10. Составьте уравнение прямой, которая отсекает на отрицательной полуоси Оу отрезок, равный 2 единицам, и образует с осью Ох угол ϕ = 300.

5.11. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок b=3 и проходящей через точку А(–6; –3).

5.12. Прямая, проходящая через точку А(–2; 3) образует с осью Ох угол 1350. Составьте уравнение этой прямой.

5.13. Составьте уравнение прямо, проходящей через точку А(1; 2), отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки.

5.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точки А(3; –5) и В(–4; 3).

Проверить лежат ли точки А(5; 2), В(3; 1) и С(–1; –1) на одной прямой.

5.15. Составить уравнение прямой, параллельной прямой 2х + 3у – 1 = 0 и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4 единицам.

5.16. В параллелограмме АВСD известны уравнения сторон 2х + у – 1 = 0 (АВ) и 3х – 2у – 5 = 0 (АD) и точка К(–3; 5) – точка пересечения диагоналей АС и ВD. Найдите уравнение сторон ВС и СD.

5.17. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(–4; 3) перпендикулярной прямой 2х –3у– 4 =0.

5.18. Даны вершины треугольника А(–5;6), В(28;7), С(15; 0). Найдите длину высоты, опущенной из вершины А.

5.19. Найдите острый угол между прямыми х – 3у + 5 = 0 и 2х + 4у – 7 = 0.

5.20. Найдите точку пересечения прямых 2х +3у – 13 = 0 и 3х = 2у – 12 = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 5.21.Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(2;–1),если эта прямая отсекает от положительной полуоси Оу отрезок, вдвое больший, чем на положительной оси Ох. А(2;–1) | у  х  А (2; -1) |

5.22. Составьте уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна .

5. 23. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А (4; 4) и отсекающей от координатного угла треугольник площадью S = 4.

5.24. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку М(2; – 6) и отсекает на осях *Ох* и *Оу* отрезки одинаковой длины.

5.25. Через точку М (4; 3) проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найдите точки пересечения этой прямой с осями координат.

у

х

5.26. Составить уравнение двух прямых, проходящих

через точку А(2;1), одна из которых параллельна прямой

3х – 2у + 2 = 0, а другая перпендикулярна той же прямой.

5.27. Треугольник АВС задан координатами своих вершин: А(1;2), В(2;–2), С(6,1). Требуется: а) записать уравнение стороны АВ, б) записать уравнение высоты СD и вычислить ее длину.

А(-2; 1)

х

у

|  |  |
| --- | --- |
| 5.28. Даны уравнения сторон прямоугольника АВСD 3х – 2у – 5 = 0 , 2х + 3у + 7 = 0 и одна из его вершин А(–2;1). Вычислите площадь этого прямоугольника |  |

**Тема 6. «Кривые второго порядка»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Найдите координаты центра и радиуса окружности:

х 2 + у 2 – 4х + 8у –16 = 0.

* Решение. Выделим полные квадраты в левой части данного уравнения и приведем его к виду: х 2– 4х + 4 – 4 + у 2  + 8у – 16 + 16 – 16 = 0,

т.е. (х – 2) 2 + (у + 4) 2 = 6 2. Следовательно, центр окружности находится в точке с координатами (2; – 4), а радиус равен 6 ед. ►

***Пример 2.*** Покажите, что уравнение 4х 2 + 3у 2  – 8х + 12у – 32 = 0 определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

* Решение. Преобразуем данное уравнение кривой, выделив полные квадраты:

4х 2 + 3у 2  – 8х + 12у – 32 = 4(х 2 + 2х) + 3(у 2  + 4у) – 32 = 4(х 2 + 2х + 1 – 1) + + 3(у 2  + 4у + 4 – 4) – 32 = 4(х – 1) 2 – 4 + 3(у + 2) 2 – 12 – 32 = 4(х – 1) 2 + 3(у +

+ 2) 2 – 48 = 0, полученное уравнение можно переписать в виде:

.

Уравнение фигуры приведено к каноническому виду, тогда центр симметрии эллипса имеет координаты (1; – 2). Из уравнения находим *а*2  = 12,  и

*b 2 =* 16, *b* = 4 (*b > а).* Поэтому . Эксцентриситет Эллипса *ε = c ⁄ a = 1 ⁄ 2.* ►

***Пример 3.*** Составьте уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси *Оу* и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

* Решение. Искомое уравнение гиперболы имеет вид **.** Согласно условию 2с = 10, следовательно с = 5; 2*b =* 8, *b* = 4. Из соотношения

*с 2= а 2+ b 2* найдем мнимую полуось *а* =3. Получаем уравнение гиперболы **.** ►

* ***Пример 4.*** Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку А (2; 4) и симметрична относительно оси О*х*. Найдите фокус и уравнения параболы и ее директрисы.
* Решение. Так как парабола проходит через начало координат и симметрична относительно оси О*х*, то ее уравнение у 2 = 2*рх*. Подставим координаты точки А, принадлежащей параболе, в это уравнение: 4 2 = 2*р∙*2 ⇒ *р* = 4 – параметр параболы. Следовательно уравнение параболы у 2 = 8*х.* А уравнение ее директрисы  ⇒ х = – 2 и координаты фокуса параболы соответственно F (2; 0). ►

**Задания для самостоятельной работы**

6.1. Запишите уравнение окружности, имеющей центр в точке О (6; 7) и касающейся прямой 5*х* – 12у – 24 = 0.

6.2. Запишите уравнение окружности, если точки А (3; 2) и В (– 1; 6) – концы диаметра окружности.

6.3 Составьте уравнение окружности, проходящей через точки А (1; 5), В (– 4; 0) и С (4; – 4).

6.4. Составьте уравнение окружности, проходящей через точку (5; 3) с центром в точке пересечения прямых 5*х* – 3у – 13 = 0 и *х* + 4у + 2 = 0.

6.5. Расстояния от одного из фокусов эллипса до концов большой оси равны 7 и 1. Составьте уравнение эллипса.

6.6. Прямые *х* = ± 8 служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найдите уравнение этого эллипса.

6.7. Постройте окружность *х* 2 + у 2  + 6*х* – 4у – 3 = 0.

6.8. Найдите координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением 2*х* 2 + у 2  = 32.

6.9. Найдите полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса 9*х*2+4у2 =36.

6.10. Составьте каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось равна 6, а расстояние между фокусами 8.

6.11. Дан эллипс **.** Составьте уравнение гтперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

6.12. Составьте уравнение гиперболы, проходящей через точку М (9; 8), если уравнения асимптот гиперболы *у* =. Найдите эксцентриситет и уравнения директрис.

6.13. Эллипс проходит через точки М 1 (2; ) и М 2 (0; 2). Составьте уранение эллипса и найдите расстояние точки М 1 от фокусов.

6.14. Составьте уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданны уравнением  и гипербола проходит через точку М (10; –3). Найдите расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

6.15. Найдите координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением 16*х* 2 – 25у 2  = 400.

|  |  |
| --- | --- |
| 6.16. Парабола с вершиной в точке О (0;0) проходит через точку А (– 2; – 3) и симметрична относительно оси О*х*. Запишите ее уравнение, найдите фокус | |
| и уравнение директрисы. | *х*  F  O  *у* |

6.17. Найдите уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты

(0; – 3).

6.18. Составьте каноническое уравнение гиперболы, проходящеи через точки

А (2; 1) и В (– 4; ).

6.19. Составьте простейшее уравнение эллипса, если: 1) *a* = 7, *b* = 5; 2) расстояние между фокусами 2с = 12, а большая ось 2а = 20; 3) большая полуось *а* = 12, эксцентриситет *е* = 0,5; 4) сумма полуосей *a* + *b* = 16, а расстояние между фокусами 2с = .

6.20. Составьтеуравнение параболы, если известно, что:

а) фокус параболы F (5; 0), а ее директрисой является ось ординат;

б) парабола симметрична относительно оси Оу и проходит через точки О (0; 0) и М(6; – 2).

6.21. Составьтеуравнение параболы: а) проходящей через точки (0; 0) и (1; – 3) и симметричной относительно оси О*х*; б) проходящей через точки (0; 0) и

(2; – 4) и симметричной относительно оси Оу.

6.22. Арка моста имеет форму параболы. Определите параметр параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота арки 6 м.

6.23. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку М (2; 1).

6.24. Определить координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением 9*х* 2 + 9у 2  + 36*х* – 18у + 20 = 0.

6.25. Найдите оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса 9*х* 2 +25у 2 –225=0.

6.26. Найдите оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы 16*х* 2 – 9у 2 – 144 = 0.

6.27. Определите координаты фокуса и составьте уравнение директрисы параболы у 2  = 4*х*.

6.28. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданны уравнениями 9*х* – 2у – 41 = 0, 7*х* + 4у + 7 = 0, *х* – 3у + 1 = 0.

6.29. Найдите уравнение окружности, симметричной с окружностью

*х* 2 + у 2  = 2*х* + 4у – 4 относительно прямой *х* – у – 3 = 0.

**Раздел II. Введение в анализ**

**Тема 7. «Элементы теории множеств. Функции»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Найти решение уравнения |*х*| = *х* + 2

* Решение.

При *х*>0 имеем *х* = *х* + 2 => 0 = 2 – неверное равенство, следовательно, решений нет.

При *х* < 0 получаем –*х* = *х* + 2 => *х* = –1. Это и есть решение уравнения. ►

***Пример 2*.** Найти решение уравнения *х* + 2|*х*| = 3.

* Решение.

При *х* > 0 имеем *х* + 2*х* = 3 => *х*1 = 1. При *х* < 0 получаем *х* – 2*х* = 3 => *х*2 = –3.

Следовательно, *х*1 = 1 и *х*2 = –3 – решения уравнения. ►

***Пример 3.*** Исследовать функцию на четность – нечетность  **.

* Решение. F(x) = 1 / (*х*2 – 1); X = ( – ∞ ; –1) ∪ (–1; 1) ∪ (1; + ∞ ) – область определения функции симметрична относительно начала координат.

f(–*х*) = 1 / ((–*х*)2 – 1) = 1 / (*х*2 – 1) = f(*х*) – функция четная. ►

***Пример 4*.** Является ли функция f(*x*) = *x*4 + *x*2; X = [–2; 10) четной?

* + Решение. f(–*x*) = (–*x*4) + (–*x*2) = *x*4 + *x*2 = f(*x*), но Х – несимметрична относительно начала координат.

Ответ: функция не является ни четной, ни нечетной. ►

***Пример 5*** *.* Показать, что функция f(*x*) = sin(5*х* + 3) имеет период Т = 2π/5.

* + Решение. Т.к. периодической функции  *f(x + Т)= f(х),* где Т– период функции, подставим значение Т = 2π/5 в исходную функцию.

Получим sin[5(*x* + 2π/5) + 3] = sin(5*x* + 2π + 3) = sin((5*x* + 3) + 2π) =

= sin(5*x* + 3), следовательно Т = 2π/5 – период данной функции. ►

**Задания для самостоятельной работы**

7.1. Найдите решения следующих уравнений.

а) | *x* | = *x* – 2 , б) *х* + 2| *x* | = 3, в) | *x* | = 6*х* + 3, г) *х*2 + 3| *x* | – 4 = 0.

7.2. Найдите область определения функции.

7.3. Найдите множество значений функции.

.

7.4. Для функции  найдите:

*а)f(0), б)f(-2), в) f(), г) f(–х), д) f(), е) f(а+1), ж) f(а)+1, з) f(2х).*

7.5. Для функции *f(х) = х3·2х* найдите:

*а)f(1), б)f(-3), в) f(), г) f(–х), д) f(), е)f(3х), ж), з) f(а– 2).*

7.6. Исследуйте на четность и нечетность функции.





7.7. Определите, является ли данная функция периодической, и найдите ее наименьший положительный период, если он существует.



7.8. Сложную функцию запишите в виде одного равенства:

а) ; б) 

в) 

7.9. Сложную функцию запишите в виде цепочки равенств:



7.10. Постройте графики данных функций, используя свойства преобразования графиков элементарных функций.



**Тема 8. "Основные понятия теории пределов.**

**Предел числовой последовательности"**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Напишите первые четыре члена последовательности, если Решение. Подставляя поочередно n = 1, 2, 3, 4 в формулу общего члена последовательности, найдем *х1 = 5/2, х2 =8/5, х3 =11/8, х4=14/11.* ►

***Пример 2.*** Зная несколько первых членов последовательности, напишите формулу ее общего члена: .

* Решение. Необходимо найти закономерность среди членов последовательности. Из чередования знаков делаем вывод, что, общий член последовательности содержит –1, т.к. первый член положительный, то в формулу будет входить множитель (–1) n – 1. Т.к. знаменатель каждого члена последовательности отличается от порядкового номера члена последовательности в 2 раза, следовательно,

формула общего члена .►

***Пример 3***. Определите, ограничена ли последовательность 2, 4, 6, 8, … снизу? Ограничена сверху? Ограничена?

* Решение. Данная последовательность, состоящая из четных положительных чисел, ограничена снизу числом 2, но неограниченна сверху. ►

***Пример 4*.** Найти предел .

* Решение. Т.к. последовательность неограниченна, преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n. И используя операции над пределами последовательностей, получим:

  =   =  =  =  = – .

В последних равенствах мы воспользовались тем, что предел константы – константа, а также тем, что последовательности  – бесконечно малые. ►

**Задания для самостоятельной работы**

8.1. Напишите первые четыре члена последовательности, если формула общего члена последовательности:

8.2. Зная несколько первых членов последовательности, напишите формулу ее общего члена.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | в) | д) |
| б) | г) | е) |

8.3. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? Ограничены снизу? Ограничены?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

8.4. Найдите пределы последовательностей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | в) | д) |
| б) | г) | е) |

**Тема 9. «Предел функции»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Докажите, что предел постоянной функции равен этой же постоянной.

* Доказательство. Пусть f(x) = С для всех х из некоторого интервала, содержащего х0, А = С.

Возьмем любое ε > 0. Тогда для любого *δ > 0* выполняется требуемое неравенство |f(x) – C| = |C – C| = 0 < ε; следовательно *.*►

***Пример 2.*** Вычислить .

* + Решение. Для нахождения предела заменим аргумент *х* его предельным значением, применив основные теоремы о пределах:

►

Рассмотрим примеры, когда применение свойств предела становится возможным лишь после некоторых предварительных преобразований.

***Пример 3.*** Вычислить .

* + Решение. , проверим не обращается ли знаменатель дроби в нуль при х = 2: 22 – 5⋅2 + 6 = 0 теоремой воспользоваться нельзя т.к. знаменатель равен 0. Разложим числитель на множители: *x*2 – 5*x* + 6 = (*x* – 3)(*x* – 2)

Тогда получим .►

***Пример 4.*** Найти предел .

* Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при х → 0 равны нулю. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.



.►

***Пример 5.*** Найти предел .

* Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при х → ∞ равны ∞, т.е. мы имеем неопределенность ∞/∞. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на х3. Тогда получим

, т.к. при х → ∞ выражения *3/х, 5/х2, 4/х, 7/хз* стремятся к нулю х → ∞ .►

***Пример 6.*** Найти предел 

* Решение. Здесь имеет место неопределенность вида 0/0, чтобы вычислить данный предел, заменим *tg x* на *sin x / cos x,* получим

.

Для решения примера мы воспользовались первым замечательным пределом. ►

**Задания для самостоятельной работы**

9.1. Пользуясь определением предела, докажите, что:



9. 2. Пусть х→0. Сравните с бесконечно малой функцией β(х)= х бесконечно малую α(х), если:



9.3. Сравните бесконечно малые  при х→1.

9.4. Вычислите предел функции в точке:



9.5. Вычислите пределы функции в бесконечности:







9.6. Пользуясь первым замечательным пределом, найдите:



9.7. Применяя второй замечательный предел, вычислите:



**Тема 10 . «Непрерывность функции»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Докажите непрерывность функции f(x) = 3*x*2 + 2*x* + 1 в точке х = 1.

Решение: 1.*х* = 1 ∈ Х.

2. .

3. f(1)=3.1 + 2.1 + 1 = 6.

 ⇒ Функция непрерывна в точке х = 1. ►

***Пример 2*.** Доказать, что f(x) = 5х2 – 6х + 2 непрерывна в ∀ т. х0 ∈ R.

* Решение. Придадим *х* приращение Δ*x* и найдем приращение функции Δy.

Δу = f(*x*+Δ*x*) – f(*x*) = 5(x+Δx)2 – 6(x+Δx) + 2 – 5x2 + 6x– 2 = 5x2 + 10Δxx +5Δx2 – 6x – 6Δx – 5x2 + 6x = 10Δx . x – 6Δx + 5Δx2 = Δx(10x – 6) + 5Δx2.

По определению . Т. е. Данная функция непрерывна в точке х0. ►

***Пример 3*.** Определить характер точки разрыва функции .

* Решение. Исследуем поведение функции в точке х = 2 слева и справа.

, т. к. один из односторонних пределов не существует, то

х = 2 – точка разрыва второго рода. ►

***Пример 4.*** Определить характер точки разрыва функции

*x – 1,* если *–1≤ х < 2,*

*f(x) =*

2– *х*, если 2 ≤ *х* ≤ 5.

* Решение. Данная функция определена в точке *х*0 = 2, найдем односторонние пределы в этой точке:

**.

Пределы функции справа и слева от точки *х*0 = 2 существуют, но неравны, следовательно *х*0 = 2 – точка разрыва первого рода. ►

***Пример 5.*** Исследуйте на непрерывность функцию и построите ее график.

*х*, при *х* ≤ – π,

*f(x) = sin x*, при *–* π < *x* < π/2,

1, при *х* > π/2.

* Решение. Функции у = х, у = sin x и у = 1 непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрыв только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках х1 = – π и х2 = π/2.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

Слева **и справа **.

Таким образом, пределы функции справа и слева в точке *х*1 = – π существуют, но не равны, т.е. функция имеет в этой точке разрыв 1-го рода.

Аналогично, для точки *х*2 = π/2 получим:

Слева**  и справа *.*

Пределы равны, но значение *f(π/2)* не определено. Отсюда следует, что х2 = π/2 – точка устранимого разрыва для функции *f(х)*. График функции изображен на рисунке.

у

*х*

0



–π

*у = х*

*y = sin x*

*у = 1*

***Пример 6.***Определить корень уравнения *х5 + 3х3 + 4х – 11 = 0,* принадлежащийотрезку[0; 2].

* Решение. Вычислим значение функции на концах отрезка

*f(0) = 0 + 0 + 0 – 11 = – 11 < 0, f(2) = 32 + 24 + 8 – 11 = 53 > 0.*

Т. к. функция на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на этом отрезке она принимает значение *f(x) = 0.* По методу половинного деления в качестве искомого корня принимается величина . Тогда .►

**Задания для самостоятельной работы**

10.1**.** Найдите пределы функций, используя свойства непрерывных функций.





10.2. Докажите непрерывность функции в любой точке числовой прямой.



10.3. Исследуйте на непрерывность функции *у = f(x)* в точке х = 1. В случае разрыва установите его характер.



10.4.Исследуйте на непрерывность данные функции и схематически постройте их графики.

****





**Раздел III. Дифференциальное исчисление**

**Тема 11. «Производная»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Найдите производную линейной функции f(x) = kx + b.

* Решение. Найдем приращение функции:

Δf = f(x) – f(x0) = (kx + b) – (kx0 + b) = k(x – x0)

По определению производной .

Тогда имеем f ‘ (x0) = k. ►

***Пример 2*.** Пользуясь определением, найдите производную функции f(*х*) = *x*3.

* Решение. Найдем разность f(*x*) – f(*x*0) = *x*3 – *x*03 = (*x* – *x*0)(*x*2 + *xx*0 +*x*02) – приращение функции. Тогда по определению производной:

.►

***Пример 3*.** По определению найти производную функции у = ln *x*.

* Решение. 1. Придадим аргументу приращение Δ*х*;

1. Найдем приращение функции Δy = ln(*x* + Δ*х*) – ln x = ln () = ln (1 + ).
2. Составим отношение 
3. Вычислим предел отношения у’ = .

Так как по эквивалентности бесконечно малых величин ln(1 + *x*) ~ *x* при х → 0, то ln(1 + Δ*х/х*) ~ Δ*х/х* при Δ*х* → 0. Тогда .►

***Пример 4.*** Пользуясь основными правилами дифференцирования, найдите производную функции .

* Решение. Преобразуем данную функцию к виду .

Отсюда, используя таблицу производных, и основные правила дифференцирования получим:

. ►

***Пример 5.*** Найдите производную функции .

* Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования частного двух функций и таблицей производных.



. ►

***Пример 6*.** Найдите производную сложной функции .

* Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: у = u3, где , где z = tg q, где q = x4. По правилу дифференцирования сложной функции получаем.

.►

***Пример 7.*** Точка движется по прямой согласно закону s(t) = 3t2 + 2t. Найдите скорость точки в моменты времени t = 3 и t = 4.

* Решение. Воспользуемся механическим смыслом производной, т.е. для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определенный момент времени нужно найти производную от пути по времени:

*v′ = s′(t) = 6t + 2*.

Тогда подставляя в полученную формулу значения времени, получим:

*v(3) = 6⋅ 3 + 2 = 20* и *v(4) = 6⋅ 4 + 2 = 26* . ►

***Пример 8***. Составьте уравнение касательной к параболе *у = х 2 – 4х* в точке *х0 =1*.

* Решение. Определим ординату *у0* точки касания, подставив уравнение параболы значение абсциссы *х0 = 1*; имеем *у0 = 1 - 4⋅ 1 = – 3.*

Для нахождения углового коэффициента касательной вычислим значение производной в точке касания: f ‘(x) = 2х – 4; , k = f ’(1) = – 2.

Теперь, зная точку (1; –3) и угловой коэффициент k = – 2, составим уравнение касательной:

у + 3 = – 2(х – 1) ⇒ у + 3 = – 2х + 2 или у = – 2х – 1. ►

**Задания для самостоятельной работы**

11. 1. Используя определение производной, найдите производные функций в точке *х* = *х*0.

11. 2. Найдите производные следующих функций.







11. 3. Составьте уравнение касательной к графику функции в данной точке.

11. 4. Составьте уравнение касательной и уравнение нормали к графикам функции

а) у =  в точке х0 = 1; б) у =  в точке х0 = 0.

11. 5. В какой точке касательная к кривой  параллельна прямой 2х + 2у – 5 = 0?

11. 6. Найдите угол, под которым пересекаются кривые:

а)  и ; б)  и .

11.7. Напишите уравнение касательной к функции  в точке пересечения графика функции с осью абсцисс.

11.8. Точка движется прямолинейно по закону s = 1/3 t3 + 2 t2 – t. Найдите скорость и ускорение движения точки через одну секунду после начала движения.

11. 9. Закон прямолинейного движения точки выражается формулой

s = 1 + t2 – 1/4 t4. Найдите скорость и ускорение движения в моменты времени t = 0, t = 2, t = 3.

11.10. Найти производные сложных функций.





11. 11. Найдите производные второго порядка от следующих функций.



11. 12. Найдите третью производную от функции f(x) = x ln 2x в точке х = 2.

**Тема 12. «Приложения производной»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Вычислите предел функции , используя правило Лопиталя.

* Решение. При подстановке предельного значения в выражение получим неопределенность 0/0 и воспользуемся правилом Лопиталя, найдя производную числителя и знаменателя:  ►

***Пример 2*.** Найдите экстремум функции у = *х*3+1.

* Решение: D(y) = R. Находим у ′= 3*х*2, т.е. у ′= 0 при *х* = 0 – критическая точка. Определим знак производной на полученных интервалах.

0 *х* Производная не меняет знак, следовательно, экстремума в точке х = 0 нет. ►

***Пример 3*.** Найдите экстремумы функции *f(x)= 3х2 + 3х.*

* Решение.1) Найдем производную функцииf ′(*x*) = 6*х* + 3;

2) Приравняем производную к нулю и определим критические точки

f ′(*x*)= 6*х* +3 = 0 ⇒ *х* = – 0,5;

3) Определим знак производной слева и справа от критической точки.

− – 0,5 + *х*

4) Т.к. производная функции при переходе через критическую точку меняет знак с «–» на «+», то *х* = – 0,5 – точка минимума. fмин (– 0,5 ) = – 0,75 – минимум функции. ►

***Пример 4*.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции у = 3*х*4 + 4*х*3 на отрезке [– 2, 1].

* Решение.

1) Найдем производную функции у ′= 12*х*3 +12*х*2 = 12*х*2(*х* + 1);

2) Определим критические точки, приравняв значение производной к нулю

у ′= 12*х*2(*х* + 1) = 0 ⇒ *х*1 = 0 и *х*2 = – 1 ∈[– 2, 1]– критические точки данной функции;

3) Определим значение функции в критических точках и на концах интервала:

f (– 2) = 16, f (0) = 0, f (– 1) = – 1, f (1) = 7;

4) Выберем наибольшее и наименьшее значение fнаим (–1) = –1, fнаиб (– 2) = 16. ►

***Пример 5*.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба функцию *у = 2х3+3х*.

* Решение. Вычислим вторую производную данной функции и приравняем ее к нулю: у′= 6*х*2+ 3*х*; у′′= 12*х*; *х*0 = 0. Определим знак второй производной слева и справа от критической точки. При переходе через точку х0 = 0 вторая производная меняет знак.

0

f′′(*x*)

*х*

–

+

Следовательно на интервале ( – ∞; 0) – график функции выпуклый вверх, в интервале (0; ∞) – выпуклый вниз. Точка (0; 0) – точка перегиба. ►

***Пример 7.*** Найдите асимптоты графика функции *у = хех*.

* Решение: Так как у данной функции точек разрыва нет – вертикальных асимптот нет..Тогда исследуем поведение функции на бесконечности:

т.к.,

Следовательно, график функции наклонных асимптот при *х → +∞* не имеет.

При х → –∞ получим соотношения:



Следовательно, при х → –∞ график имеет горизонтальную асимптоту *у* = 0. ►

***Пример 8*.** Проведите исследование функции  и постройте ее график.

* Решение. По плану исследуем функцию.

1. Область определения *D(f)* – вся числовая ось, за исключением точек *х = –2* и

*х = 2*, т.е. D(f) = (−∞; −2) ∪ (−2; 2) ∪ (2; +∞).

2. Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность: область определения симметрична относительно начала координат,

.

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при *х* ≥ 0.

3. Определим вертикальные асимптоты функции:

,

т.е. прямая *х = 2* – вертикальная асимптота. Отсюда в силу симметрии, следует, что прямая *х = – 2* – также вертикальная асимптота.

4. Найдем наклонные асимптоты:





т.е. прямая *у = – х* – наклонная асимптота при *х → +∞* (то же и при *х → –∞* ).

5. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя в первую производную:

.

Приравняв производную к нулю, определим критические точки: х =  и

х = – . Исследуем знак производной на полученных интервалах.

– 

–2

2



f′ (x)

+

+

+

–

–

Отсюда видно, что функция имеет минимум в точке х = –  (причем

f(–) ≈5,2) и максимум в точке х =  (причем f() ≈ –5,2). Возрастает на интервалах (−; −2) ∪ (−2; 2) ∪ (2; ) и убывает на интервалах

(−∞; −) ∪ (; +∞).

6. Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную функции:

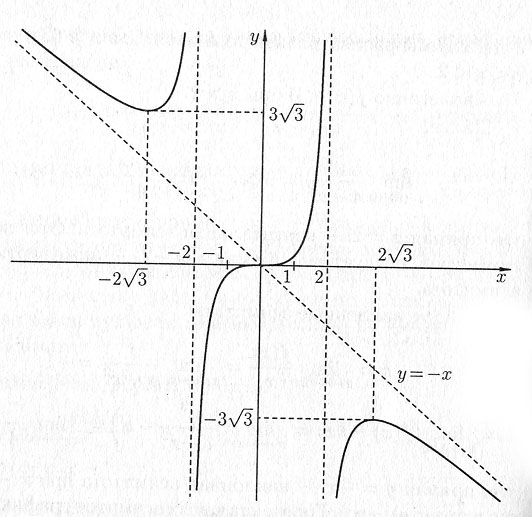
.

Данное выражение обращается в нуль лишь при х = 0.

Отсюда ясно, что на интервалах (−∞; −2) и (0; 2) функция выпукла вниз, а на интервалах (−2; 0) и (2; +∞) выпукла вверх, т.е. х = 0 – точка перегиба.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат: с осью *Оу* график пересекается при х = 0, откуда у = f(0) = 0, т.е. точка пересечения с осью *Оу* М(0;0) – единственная точка пересечения графика с осями.

Учитывая накопленную информацию, строим график функции.

****

**Задания для самостоятельной работы**

12. 1. Вычислите производную функций:



12. 2. Найдите вторую производную функций:



12. 3. Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя:



12. 4. Найдите интервалы монотонности функций:

.

12. 5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функций на отрезках:



12. 6. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости функции и точки перегиба.



12. 7. Найдите асимптоты графиков функций:



12. 8. Исследуйте функции и постройте их графики:



**Тема 13. «Дифференциал функции»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислите приближенно изменение функции у = *х* 3 – 7*х* 2 + 80 при изменении аргумента *х* от 5 до 5,01.

* Решение. Найдем Δу ≈ dy = y ′Δ*x*= (3*x* 2 – 14*x*) ′Δ*x.*

При х = 5, Δ*x* = 5,01 – 5 = 0,01 получим Δу = (3⋅5 2 – 14⋅5)0,01 = 0,05.►

***Пример 2***.Найдите относительную и абсолютную погрешности при замене приращения функции у = *х* 3 + 2*х* ее дифференциалом в точке *х* = 2 при Δ*x* = 0,1.

* Решение. Найдем приращение этой функции.

Δу = ((*х* +Δ*x*)  3 + 2(*х* +Δ*x*)) – (*х* 3 + 2*х*) = 3*х* 2 Δ*x*+ 3*х* (Δ*x*) 2 +(Δ*x*) 3 + 2Δ*x*.

Тогда при заданных значениях *х* = 2 и Δ*x* = 0,1, получим

Δу = 3⋅22 ⋅0,1+ 3⋅2⋅ 0,1 2 +0,1 3 + 2⋅0,1 = 1,461.

Найдем дифференциал функции: dy = y ′Δ*x* = (3*х* 2 + 2) Δ*x*, тогда при *х* = 2 и Δ*x* = 0,1, имеем dy = (3⋅2 2 + 2) 0,1 = 1,4; найдем абсолютную погрешность вычислений⏐Δу ─ dy⏐=1,461–1,4 = 0,061; относительная погрешность ,

Относительная погрешность при данной замене составляет 4 %.►

***Пример 3.*** Вычислите приближенно 3,002 4**.**

* Решение. Рассмотрим функцию f(*x*) = *х* 4. Здесь х 0 = 3, а Δ*x*  = 0,002.

Найдем f(*x*0) = f(3) = 34 = 81, тогда f ′ (*x*0)⋅Δ*x* = 4⋅3 3⋅0,002 = 0,216**.**

Итак, 3,002 4 ≈ 81 + 0,216 = 81,216. При вычислении на калькуляторе данного значения получается 81,216116096016. ►

**Задания для самостоятельной работы**

13.1. Найдите приближенное значение приращения функции у = 3*х* 2 + 5*х* 2 + 1 при изменении аргумента *х* = 3 и Δ*x* = 0,001.

13.2. С помощью дифференциала найдите приближенно приращение функции y = ln *x* при *х* = 10 и Δ*x* = 0,01.

13.3. Найдите приближенное значение приращения функции у = *х* 3 – 2*х* + 1 при изменении аргумента *х* = 2 и Δ*x* = 0,01.

13.4. Сторона квадрата равна 8 см. На сколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на 1 см? Найдите главную линейную часть приращения площади квадрата.

13.5. На сколько увеличится объем шара при нагревании, если его радиус 5 см удлинится на 0,002 см?

13.6. Найдите увеличение объема куба при нагревании, если его ребро 10 см удлинится на 0,01 см?

13.7. Найдите приближенно приращение функции у = 3*х* 2 + 2 при *х* = 2 и Δ*x* = 0,001. Определите абсолютную и относительную погрешности вычисления.

13.8. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см . Определите приближенно величину изменения объема куба и найдите погрешность этого приближения.

13.9. Найдите абсолютную и относительную погрешность приближенного приращения функции у = 2*х* 3 + 5 при *х* = 2 и Δ*x* = 0,001.

13.10. Ребра куба увеличены на 1 см. При этом дифференциал объема куба оказался равным 12 см 3. Найдите первоначальную длину ребер.

13.11. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции  при *х* = 2 и Δ*x* = 0,2.

13.12. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции  при *х* = 1 и Δ*x* = 0,2.

13.13. Найдите приближенное значение функции  при *х* = 1,02.

13.14. Найдите дифференциал функции y = tg *x* в точке *х* 0 = π/4, если Δ*x* = 0,5.

13.15. Найдите приближенные значения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) tg 46 0; | г) sin 31 0; | ж) ; | к) arcsin 0,51; |
| б) ; | д) cos 61 0; | з) arctg 1,04; | л) e 1,03; |
| в) 1,998 5; | е) ; | и) ; | м) ln(e + 0,272). |

13.16. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела, g л = 1,6 м/с 2.

**Раздел IV. Комплексные числа**

**Тема 14. «Понятие и представления комплексных чисел»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Запишите комплексное число z = – 1 + i в тригонометрической форме.

* Решение. Найдем модуль комплексного числа z:

.

Из соотношения в прямоугольном треугольнике получим

, т. Е. .

Тогда аргумент числа z: .

Число z в тригонометрической форме: .►

***Пример 2***. Найдите (1 +i)9.

* Решение. Запишем сначала число z = 1 +i в тригонометрической форме:

г = = 2; arg *z* = arc tg =>

=> arg *z* = , *z* = 2(cos + i sin).

По формуле Муавра имеем

z9 = (1 +i)9= 29(cos 9+ i sin 9) = 29(cos3π+ i sin3π) = 29(-l) = -512. ►

***Пример 3*.** Выполните деление .

* Решение. Умножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное знаменателю.

 = .►

***Пример 4.*** Найдите значения .

* Решение. Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

–1 = cos π + i sin π.

Поэтому

.

При k = 0 получаем ω0 = cos  + i sin  = I;

а при k = 1 получаем ω1 = cos  + i sin  = – i.

Таким образом,  и .►

***Пример 5*.** Решите уравнение *х2 – 6х + 13 = 0.*

* Решение. Найдем дискриминант уравнения по формуле *D = b2 – 4ac.*

D = (– 6) 2 – 4∙1∙13 = – 16; .

Корни уравнения находим по формулам , тогда имеем:

.►

**Задания для самостоятельной работы**

14.1. Выполните действия над комплексными числами.

|  |  |
| --- | --- |
| а) (3 + 5*i*) + (7 – 2*i*); | д) (6 + 2*i*) + (5 – 3*i*); |
| б) (– 2 + 3*i*) + (7 – 2*i*); | е) (5 – 4*i*) + (6 + 2*i*); |
| в) (3 – 2*i*) – (5 + *i*); | ж) (4 + 2*i*) – (–3 + 2*i*); |
| г) (– 5 + 2*i*) – (5 + 2*i*); | з) (–3 – 5*i*) – (7 – 2*i*). |

14.2. Произведите умножение комплексных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| а) (2 + 3*i*) (7 – 2*i*); | д) (6 + 4*i*) (5 + 3*i*); |
| б) (– 2 + 3*i*) (3 + 5*i*); | е) (5 + 4*i*) (– 2*i*); |
| в) (1 –*i*) (1 + *i*); | ж) (3 + 2*i*) (1 + *i*); |
| г) (6 + 4*i*) 3*i*; | з) (3 + 5*i*) (7 – 2*i*). |

14.3. Выполните действия

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) (3 + 5*i*) 2; | д) (6 – 2*i*) 2; | и) (7 – 2*i*) (7 + 2*i*); |
| б) (2 + 3*i*) 3; | е) (5 – 4*i*) 3; | к) (– 2 + 3*i*) (– 2 – 3*i*); |
| в) (5 – *i*) 2; | ж) (4 + 2*i*) (4 – 2*i*); | л) (5 + *i*) (5 – *i*); |
| г) (5 – 2*i*) 3; | з) (–3 – 5*i*) (–3 + 5*i*); | м) (*а* + b*i*) (*а* – b*i*). |

14.4.Выполните деление комплексных чисел**.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а); | г) ; | ж) ; |
| б) ; | д) ; | з) ; |
| в) ; | е) ; | и) . |

14.5.Следующие комплексные числа изобразите векторами и запишите в тригонометрической и показательной форме:

|  |  |
| --- | --- |
| а) z = 2 + 2*i*; | г) z = –3 – 2*i*; |
| б) z = – 5*i*; | д) z = 1 + *i*; |
| в) z = –1 + *i*; | е) z = 1 – *i*. |

14.6. Запишите комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

14.7. Решите квадратные уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| а); | в) ; |
| б) ; | г) . |

14.8. Вычислите:

|  |  |
| --- | --- |
| а); | в) ; |
| б) ; | г) . |

14.9. Выполните действия, и результат представьте в алгебраической форме:

|  |  |
| --- | --- |
| а) ; | б) . |

14.10. Определите в показательной и алгебраической форме комплексные амплитуды гармонических колебаний и постройте векторные диаграммы комплексных амплитуд.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ; | ; | ; |
| ; | ; | ; |
| ; | ; | . |

* 1. 14.11. Определите в алгебраической форме комплексное сопротивление двухполюсника с параметрами Z1(Ом) = 1 + *i*; Z2(Ом) = – 4*i*; Z3(Ом) = 4 – 3*i*;

Z4(Ом) = 2*i*; Z5(Ом) = 3*i*.

Z1

Z3

Z5

Z2

Z4

**Раздел V. Интегральное исчисление**

**Тема 15.** **«Первообразная функции и неопределенный интеграл»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Вычислите интеграл методом непосредственного интегрирования .

* Решение. Для приведения интеграла к табличному, разделим числитель почленно на 2*х*, представив подынтегральную функцию в виде суммы трех дробей:

 ***Пример 2*.** Найдите интеграл .

* Решение. Поскольку , то используем замену переменной . Тогда .

.►

***Пример 3.*** Вычислите интеграл 

* Решение. Интеграл содержит произведение двух функций *х* и *e –2x*. Способ постановки не дает возможности найти этот интеграл. Обозначим *u = x,*

*dv = e –2xdx*, тогда *du = dx*, найдем значение *v*:



По формуле интегрирования по частям



= .►



***Пример 4*.** Найдите интеграл .

* Решение. Так как степень числителя выше степени знаменателя, т.е. это неправильная рациональная дробь, выделим из нее целую часть, представив в виде многочлена и правильной рациональной дроби:









*х* – 2

(целая часть)

( остаток)







6





В результате преобразования получим:



.►

***Пример 5*.** Найдите интеграл .

* Решение. Выделив в подкоренном выражении полный квадрат, имеем

.►

**Задания для самостоятельной работы**

15.1. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найдите интеграл.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | е); | л); | р); |
| б); | ж); | м); | с); |
| в); | з); | н); | т); |
| г); | и); | о); | у); |
| д); | к); | п); | ф). |

15.2. Найдите неопределенные интегралы, используя подходящую подстановку.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | е); | л); | р) ; |
| б) ; | ж); | м); | с) ; |
| в); | з); | н); | т); |
| г); | и); | о); | у); |
| д); | к); | п); | ф) . |

15.3. Найдите неопределенные интегралы, используя интегрирование по частям.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | г); | ж); | к) ; |
| б) ; | д); | з) | л) ; |
| в); | е); | и); | м). |

15.4. Вычислите интегралы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а); | в); | д); |
| б); | г); | е). |

15.5. Вычислите интегралы от неправильных дробей.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а); | б); | в). |

**Тема 16. «Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** По определению вычислите интеграл , C = const.

* Решение. Разобьем [а;b] на *n* произвольных частей точками, такими что

*а* = х0 < х1 < х2 < … < хn = *b* и составим интегральную сумму.

= f(ξ1) Δx1 + f(ξ2) Δx2 + … + f(ξn) Δxn =

= CΔx1 + CΔx2 + … + CΔ xn =

= C[(x1 – a) + ( x2 –x1) + … + (b – xn-1)] =

= C[x1 – a + x2 – x1 + … + xn-1 – xn-2 + b – xn-1] = C(b – a).

Интегральная сумма не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек ξ и равна C(b – a). Следовательно ее предел при mах{Δ хi} → 0 равен той же величине.

По определению .►

***Пример 2*.** Вычислите интеграл .

* Решение. По формуле Ньютона – Лейбница находим .►

***Пример 3.***Вычислите интеграл .

* Решение. Воспользуемся методом замены переменной, заменив выражение, стоящее в скобках новой переменной. .►

***Пример 4.***Вычислите интеграл .

* Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

.►

**Задания для самостоятельной работы**

16.1. Вычислите определенные интегралы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | в); | д); | ж) ; |
| б) ; | г); | е); | з) . |

16.2. Вычислите определенные интегралы с помощью замены переменной.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | г); | ж); | к) ; |
| б) ; | д); | з); | л) ; |
| в) ; | е); | и); | м) . |

16.3. При помощи интегрирования по частям вычислите интегралы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а); | в); | д); | ж) ; |
| б); | г) | е); | з) . |

**Тема 17. «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.***Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями у = √ х, у = 2, х = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 2  1  0 0  1  2  3  4  х  у = √ х  А  В  С  у | * Решение.   Из рисунка видно, что площадь криволинейной фигуры ОАВ равна разности площади прямоугольника ОАВС и площади фигуры ОВС.  SOAB = SOABC – SOBC,  а одним из пределов интегрирования является абсцисса точки пересечения графиков функции у = √ х и у = 2. Найдем этот предел интегрирования, решив систему уравнений  у = 2,  у = √х |

В результате получаем х = 4, у = 2. Площадь каждой фигуры находим по площади криволинейной трапеции.

.►

Такое решение – пример использования свойства аддитивности площади: данная фигура представляется как «разность» двух более простых фигур.

***Пример 2.*** Найдите площадь фигуры ограниченной графиками функций у1 = х и

у2 = 2 – х2.

|  |  |
| --- | --- |
| у  2  - 2  1  - 1  х  у1 = х  у2 = 2 - х2 | * Решение.   Из рисунка видно, что пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Найдем их. Для этого решим систему уравнений.  У = х,  у = 2 – х2.  В результате получаем х1 = - 2, х2 = 1. Искомую площадь находим по формуле (2):  .► |

***Пример 3*.** Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры ограниченной линиями *у = е – х*, *у* = 0, *х* = 0, *х* =1 вокруг оси Ох.

|  |  |
| --- | --- |
| у = е - х  у  1  1  0  х | * Решение.   По формуле (4) искомый объем  .► |

***Пример 4.*** Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры ограниченной линиями у = х3 и у = 1.

|  |  |
| --- | --- |
| у  0  1  1  х  х = 3√ у | * Решение.   Выражая из формулы у = х3, х получим уравнение кривой в виде х = ϕ(у), в которой предполагается, что у – независимая переменная. Тогда объем полученной фигуры ограничен линиями .  Применяя формулу (5) получаем  .► |

***Пример 5 .*** Вычислите длину дуги верхней ветви кубической параболы *у = х3/2* от *х = 0* до *х = 5*.

|  |  |
| --- | --- |
| у  0  5  х  у = х 3/2 | * Решение.   Из уравнения у = х3/2 находим у ′ = 3/2 х1/2. Следовательно, по формуле (6) получим  ► |

**Задания для самостоятельной работы**

17.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: 

17.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: 

17.3. Найдите площадь фигуры, заключенной между кривыми 

17.4. Найдите площадь фигуры, заключенную между параболой , касательной к ней в точке (3; 5) и осью *Оу.*

17.5. Найдите площадь фигур, изображенных на рисунках.

0

*у = х 2– х – 2*

х

у

3

а)

0

π

х

1

б)

0

х

*у = е х*

е

у

– 1

в)

17.6. Вычислите площадь фигуры, расположенной в верхней полуплоскости и ограниченной линиями 

17.7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями .

17.8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями 

17.9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями 

17.10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями 

17.11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями 

17.12. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  вокруг оси Оу.

17.13. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями 

17.14. Вычислите объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями 

17.15. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями 

17.16. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями 

17.17. Криволинейная трапеция, ограниченная , вращается вокруг оси абсцисс. Вычислите объем тела, которое при этом образуется.

17.18. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями 

17.19. Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры  вокруг оси Оу.

17.20. Определите объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями 

17.21. Найдите длину дуги кривой  до точки с абсциссой *х* = 6.

17.22. Найдите длину дуги кривой  от  до .

17.23. Найдите длину дуги кривой  , отсеченной осью *Ох*.

17.24. Найдите длину дуги кривой , отсеченной прямой *х* = 4.

17.25. Найдите длину дуги кривой  от у = – 3 до у = 0.

**Тема 18. «Несобственные интегралы»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Исследуйте несобственный интеграл на сходимость.

* Решение:  т.е. данный интеграл сходится. ►

***Пример 2.*** Исследуйте несобственный интеграл на сходимость .

* Решение. , при b → +∞ предел не существует – интеграл расходится. ►

***Пример 3*.** Сходится ли интеграл .

* Решение. При х ≥ 1 имеем 

А т.к. интеграл - сходится. Следовательно, интеграл  также сходится (и его значение меньше 1). ►

***Пример 4*.** Исследуйте сходимость интеграла .

* Решение. Интеграл  сходится, так как интеграл  сходится и

.►

***Пример 5.*** Вычислите .

* Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при *х = 0*.

, т.е. интеграл расходится. ►

**Задания для самостоятельной работы**

18.1. Найдите значения несобственных интегралов или установите их расходимость:



18.2. Исследуйте несобственные интегралы на сходимость, используя признаки сравнения.

18.3. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.



18.4. Исследуйте несобственные интегралы на сходимость, используя признаки сравнения.



**Раздел VI. Дифференциальные уравнения**

**Тема 19. «Дифференциальные уравнения первого порядка»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Проверьте, является ли функция *у* = *x 2* + *x +* С решением дифференциального уравнения *dy* = (2*х* + 1) *dx*.

* Решение. Найдем производную указанной функции , представив *у′* в виде , получим *dy* = (2*х* + 1) *dx.* Подставим полученное значение *dy* в левую часть заданного уравнения, имеем (2*х* + 1) *dx ≡* (2*х* + 1) *dx*, т.е. данная функция есть решение этого уравнения.►

***Пример 2.*** Найдите общий интеграл уравнения *х⋅у⋅у* ′ + 1= *у.*

* Решение. Запишем уравнение в виде 

Переменные разделены, проинтегрируем обе части уравнения.

►

***Пример 3*.** Найдите общий интеграл уравнения .

* Решение. Преобразуем .

Положим , тогда 

Переходим к уравнению с разделяющимися переменными.



Обозначим,  получим 1 + t = Cx.

Возвращаясь к переменным х и у, имеем ►

***Пример 4*.** Решить уравнение .

* Решение. Найдем решение уравнения методом Бернулли. Положим

y = u · v, тогда y *′* = u*′*  · v + u · v*′*  , подставляя у и y *′* в исходное уравнение, получим:

 (\*)

Подберем функцию v = v(x) так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим

, , интегрируя данное выражение, получаем



Подставляя найденную функцию в уравнение (\*), получаем , тогда

,

Возвращаясь к переменной у, получаем решение исходного ДУ

. ►

***Пример 5.*** Определите численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн. человек, а прирост населения за 2000 год был равен α %. (Вычислить при α = 2 %, α = –1%).

* Решение. Обозначим численность населения России в момент времени t через *N = N(t).* Тогда дифференциальное уравнение процесса изменения численности населения будет таким

** где k > 0 – коэффициент пропорциональности.

Отсюда находим, **

откуда , т.е. , т.е.

учитывая, что N > 0, имеем – общее решение уравнения. Согласно условию задачи N = 145 млн. при t = 0. Находим частное решение:

145 = *С е 0*, т.е. С = 145, .

Найдем значение коэффициента k, зная, что в конце 2000 года, т.е. при t = 1, население равно  млн. человек: .

Отсюда , т.е. . Тогда .

Таким образом, через 20 лет численность населения составит:

при α = 2 %:  (млн. человек);

при α = – 1 %:  (млн. человек). ►

**Задания для самостоятельной работы**

19.1. Покажите, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| а) *х2 + у2 = 4,* ; | в) ; |
| б); | г) . |

19.2. Выясните, являются ли решениями дифференциального уравнения *х2 у′′ = 2у* следующие функции:



19. 3. Выясните, являются ли решением ДУ *у′′ + 4у′ + 4у =0*  следующие функции:



19.4. Общее решение ДУ *у′ – 3у =0* имеет вид *у = С е3х.* Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям *у(1) = е 3*.

19.5. Зная общее решение *у = х2 + С* дифференциального уравнения *у′ = 2х,* найдите и постройте интегральные кривые, проходящие через точки А (0; 0),

В (–1; 2), С (2; 1).

19.6. Решите уравнение *ху′ + у = 0.* Найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию *у =1* при *х = 4*.

19.7. Найдите частный интеграл уравнения *у′* sin*2х* ln *y + у =0,* удовлетворяющий условиям у (π /4) =1.

19.8. Найдите общий интеграл следующих дифференциальных уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| a) | д) *(1 + x) y dx + (1 – y) x dy = 0;* |
| б) *;* | e) *(1 + x) dу – (1 – y) dх = 0;* |
| в) *(y + x y) dx + (x – x y) dy = 0;* | ж) *x у y′ = 1– х 2;* |
| г)cos *2 y* ctg *x dx +* sin *2 x* tg *y dy = 0;* | з) *y′ (1+ у) = х у sin x.* |

19.9. Найдите общий интеграл уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| a) *x y ′ = 3y – x*; | г) *(x 2 + y 2) dx – x y dy = 0*; |
| б) *y ′ = 1 +* ; | д) ; |
| в) *2 x 3 y ′ = 2 x 2 y – y 3;* | е) |

19.10. Найдите общее решение дифференциальных уравнений.

|  |  |
| --- | --- |
| a) | д) |
| б) *x y ′ - 2 y = 2 x 4*; | е) *y ′ + 2 x y = 2 x*; |
| в) *y ′ + 2 x y = ;* | ж) *х* *y ′ + y – 3 x2 = 0*; |
| г) *y ′ – y tg x = sin x*; | з) . |

19.11. Скорость распада радия пропорциональна его имеющемуся количеству R. Найдите закон распада радия, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества. Какой процент радия окажется распавшимся через 100 лет?

19.12. Скорость падающего тела в момент времени *t* равна *v = g t*, где g = 9,8 м / с2 . На каком расстоянии от земли находится тело в момент времени *t*, если оно начало падать с высоты *y0*?

19.13. Известно, что скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в рассматриваемый момент времени t. Найдите зависимость количества бактерий от времени, если в течение 5 часов их количество утроилось.

|  |  |
| --- | --- |
| 19.14. Найдите кривую, проходящую через точку А (1; 0) и такую, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания. | О  х  М  С  А  у  В |

**Тема 20. «Дифференциальные уравнения высших порядков»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Найдите решение уравнения *у ″ = 4х.*

* Решение. Данное уравнение можно решить двукратным интегрированием.

Интегрируя первый раз, получим:

.

Проинтегрировав еще раз, имеем:



Полученный результат проверим дифференцированием:

; *у ″ = 4х.* ►

*Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дифференциальное уравнение |  | | |
| Характеристическое уравнение |  | | |
| Дискриминант |  |  |  |
| Корни характеристического уравнения | *k1 ≠ k2* | *k1 = k2* | *k1 = a + bi*  *k2 = a – bi* |
| Множества решений |  |  |  |

***Пример 2***. Решите уравнение .

* Решение. Составим характеристическое уравнение .

Здесь D = . Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их:

*k1 =* – 4, *k2 =* 2.

Находим частные решения данного дифференциального уравнения:

.

Общее решение данного уравнения имеет вид

.►

***Пример 3***. Решите уравнение .

* Решение. Составим характеристическое уравнение .

Здесь D = . Следовательно, корни данного характеристического уравнения *k1 = 2 + 3i, k2 = 2 – 3i.*

Тогда общее решение ДУ: .►

**Задания для самостоятельной работы**

20.1. Найдите общие решения уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| а) *у ″ =* 1 *– x 2;* | д) *у ″ = х +* 1*;* |
| б) *у ″ = х;* | е) *у ″ = sin* 2*x;* |
| в) *у ″ = х 3;* | ж) *у ″ =* 18 *х +* 2*;* |
| г) *у ″ =* 5*;* | з) *у ″ = cos x.* |

20.2. Найдите частное решения уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

а) *у ″ =* 1 *+ х + x 2+ х 3,* если *у*(0) *=* 1*, у*′(0) *=* 1;

б) *у ″ =* 1 *– 2 х,* если *у*(3) *=* 12*, у*′(1) *=* 2;

в) *у ″ =* sin *x –* 1*,* если *у*(0) *=* – 1*, у*′(0) *=*1;

г) *у ″ =* 1 –  *,* если *у*(1) *=* – 1*, у*′(1) *=*1.

20.3. Из семейства интегральных кривых уравнения *у ″ =* 2 *х –* 3 *x 2* выделите кривую, проходящую через точку (1; 0) и касающуюся в ней прямой *у – х +* 1 = 0.

20.4. В некоторый момент времени движение поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найдите время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению поезда равно 0,3 веса поезда.

20.5. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
| а) *у ″ –* 3 *у′ +* 2*у =* 0; | д) *у ″ +* 2 *у′ +* 5*у =* 0; |
| б) *у ″ –* 4 *у′ +* 3*у =* 0; | е) *у ″ –* 5 *у′ –* 6*у =* 0; |
| в) *у ″ –* 4 *у′ +* 4*у =* 0; | ж) *у ″ +* 6 *у′ +* 25*у =* 0; |
| г) *у ″ –* 6 *у′ +* 9*у =* 0; | з) *у ″ +* 9 *у′ =* 0. |

20.6. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

а) *у ″ –* 2*у′ –* 3*у =* 0*,* если *у*(0) *=* 8*, у*′(0) *=* 0;

б) *у ″ –* 2*у′ + у =* 0*,* если *у*(0) *=* 4*, у*′(0) *=* 2;

в) *у ″ –* 2*у′ +* 50*у =* 0*,* если *у*(0) *=* 1*, у*′(0) *=*1;

г)3 *у ″ +* 7*у′ +* 4*у =* 0*,* если *у*(0) *=*  1*, у*′(1) *=*;

д) *у ″ +* 3*у′ +* 2*у =* 0*,* если *у*(0) *= –*1*, у*′(0) *=*3.

20.7. Найдите интегральную кривую дифференциального уравнения

*у ″+* 2 *у′ +* 2*у =* 0, проходящую через точку (0;1) и касающуюся в этой точке прямой *у* = 1 + *х*.

20.8. Найдите интегральную кривую дифференциального уравнения

*у ″ –* 4 *у′ +* 3*у =* 0, проходящую через точку (0;2) и касающуюся в этой точке прямой *у* = 2 + *х*.

**Раздел VII. Ряды**

**Тема 21. «Числовые ряды»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Выясните, ряд  сходится или нет, и найдите его сумму.

* Решение. Рассмотрим частичные суммы данного ряда:





………………………. ,

.

Следовательно, , т.е. ряд сходится, его сумма равна 1. ►

***Пример 2.*** Исследуйте сходимость ряда .

* Решение. Найдем предел общего члена ряда , т.е. выполняется достаточное условие расходимости ряда – ряд расходится. ►

***Пример 3*.** Исследуйте сходимость ряда .

* Решение. Сравним данный ряд с геометрическим сходящимся рядом

 . Имеем , т.е. . Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится. ►

***Пример 4.*** Исследуйте на сходимость ряд .

* Решение. Применим предельный признак сравнения. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом **.

Т.к. ,

то по предельному признаку сравнения данный ряд тоже расходится. ►

***Пример 5.***Исследуйте на сходимость ряд *.*

* Решение. Вычислим предел отношения n-го члена ряда к n+1:

.

Так как *l = 1/2 < 1*, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ►

***Пример 6*.** Исследуйте на сходимость ряд .

* Решение. Вычисляем

.

Так как *l = 1/2 < 1*, то данный ряд по признаку Коши сходится. ►

***Пример 7.***Исследуйте сходимость ряда .

* Решение. Так как члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине , и предел общего члена ряда , то по признаку Лейбница ряд сходится. ►

***Пример 8.***Исследовать сходимость ряда .

* Решение. Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд

,

расходится (гармонический ряд), следовательно, данный ряд условно сходящийся.►

**Задания для самостоятельной работы**

21.1. Найдите четыре первых члена ряда, если общий член ряда выражен формулой



21.2.Напишите в простейшей формеобщий член ряда.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | в) | д) |
| б) | г) | е) |

21.3. Найдите сумму ряда и ответьте на вопрос о сходимости ряда.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.4. Исследуйте на сходимость ряды, используя необходимый признак сходимости.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.5.С помощью 1-го признака сравнения исследуйте данные ряды на сходимость.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.6. Исследуйте на сходимость ряды с помощью предельного признака сравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.7.Исследуйте на сходимость ряды с помощью признака Даламбера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; | ж) ; | и) ; |
| а) ; | в) ; | д) ; | ж) ; | и) ; |

21.8. Используя признак Коши, исследуйте знакоположительные ряды.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.9. Исследуйте на сходимость знакочередующиеся ряды с помощью признака Лейбница.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.10. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | в) ; | д) ; |
| б) ; | г) ; | е) . |

21.11. Найдите сумму ряда ****с точностью до 0,0001.

**Тема 22. «Степенные ряды»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Определить интервал сходимости ряда .

* Решение. Воспользуемся теоремой о структуре области сходимости степенного ряда .

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.►

***Пример 2*.** Найдите область сходимости ряда .

* Решение. Находим радиус сходимости ряда по теореме о структуре области сходимости степенного ряда.

.

Следовательно, радиус сходимости *R = 2,* т.е. ряд сходится при –2 < x + 2 < 2 ⇒ 4 < x < 0 – интервал сходимости ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При х = – 4 имеем ряд , который по признаку Лейбница сходится.

При х = 0 имеем расходящийся гармонический ряд .

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуинтервал [– 4; 0). ►

***Пример 3.*** Разложите в ряд Тейлора по степеням  функцию *f(x) =* ln(*x +* 2).

* Решение. Найдем коэффициенты разложения при:

|  |  |
| --- | --- |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ……………………………………… | …………………………………… |
| ; | . |

Подставив найденные значения в общее выражение ряда Тейлора, получим

ln(*x +* 2) =►

**Задания для самостоятельной работы**

22.1. Исследуйте сходимость степенного ряда:

в точках *х* = 1, *х* = 3, *х* = – 2;

 в точках *х* = 1, *х* = 3, *х* = 4;

в точках *х* = 1, *х* = 2, *х* = 5.

22.2. Найдите радиус сходимости степенного ряда:





22.3. Найдите область сходимости степенного ряда: 

22.4. Разложите функцию в ряд Маклорена:

22.5. Вычислите приближенно с точностью до 0,001:

****

**Раздел VIII. Функции нескольких переменных**

**Тема 23. «Функции двух переменных»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1.*** Найдите область определения функции .

* Решение. Функция принимает действительные значения в тех точках, в которых *х* – *у* ≥ 0, т.е. *х* ≥ *у.* ( см. рисунок)

*х* ≥ *у*

*у = х*

у

х

***Пример 2.*** Найдите предел *.*

* Решение. Будем приближаться к точке О (0; 0) по прямой у = kx, где k – некоторое число. Тогда

*= .*

Функция  в точке О(0; 0) предела не имеет, т. к. при различных значениях k предел функции не одинаков. ►

***Пример 3.*** Найдите линии уровня функции .

* Решение. Линия уровня *z* = *c* определяется уравнением . Это пулупорабола, расположенная в первой четверти при с > 0, во второй четверти плоскости О*ху* при c < 0, и полуось О*у* (х = 0, у > 0), если с = 0. ►

**Задания для самостоятельной работы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 23.1. Выразите объем кругового конуса как функцию длин его образующих *х* и радиуса основания у. | *h*  *0*  *у*  *х* | |
| 23.2. Выразите площадь равнобочной трапеции как функцию трех величин: длин оснований *х* и *у* и боковой стороны z. | | *z*  *x*  *y* |

23.3. Выразите площадь S треугольника как функцию длин двух его сторон *х* и *у* при условии, что известен полупериметр треугольника *р*.

23.4. Выразите объем конуса как функцию его образуещей и высоты. Укажите область определения этой функции.

23.5. Найдите значения функции *f(x; y)* в указанных точках:

а)  в точке (3; –2);

б)  в точке (2; –1);

в)  в точке (2; 3).

23.6. Найдите область определения функции .

23.7. Найдите область определения функции .

23.8. Найдите область определения функции .

23.9. Найдите область определения функции 

23.10. Найдите область определения функции .

23.11. Найдите область определения функции .

23.12. Найдите линии уровня следующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) ; | б) ; | в) ; | г) . |

23.13. Найдите пределы функций двух переменных



.

23.14. Найдите точки разрыва следующих функций и исследуйте поведение функций в окрестностях этих точек:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) ; | б) ; | в) . |

**Тема 24. «Производные и дифференциалы**

**функции нескольких переменных»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Найдите частные производные функции z = x2y – 3y2 + 5x.

* Решение. Рассматривая х и у как постоянные величины, находим

z ′x = (x2y – 3y2 + 5x)′x = 2xy – 0 + 5 = 2xy + 5.

Z ′y = (x2y – 3y2 + 5x)′y = x2 – 6y + 0 = x2 – 6y.►

***Пример 2*.** Найдите производную , если *z = f(x; y), x = t3 + 2, y = 3t4 – 1.*

* Решение. Используя формулу (1), имеем

 = .►

***Пример 3*.** Найдите дифференциал функции z = xy2.

* Решение. Находим частные производные:

f ′x(x; y) = у2, f ′y(x; y) = 2ху, а затем дифференциал:

dz = у2 dx + 2ху dy. ►

***Пример 4.*** Вычислите приближенно 1,02 3,01.

* Решение. Рассмотрим функцию *z = x y*. Тогда 1,02 3,01 = (х + Δx) у + Δу, где

х = 1, Δx = 0,02, у = 3, Δy = 0,01. Воспользуемся формулой для приближенных вычислений предварительно найдя частные производные функции z = xy по х и по у.

z ′x = y ⋅ x y – 1, z ′y = x y ⋅ ln x.

Следовательно, 1,02 3,01 ≈ 13 + 3 ⋅ 13 - 1⋅ 0,02 + 13 ⋅ ln 1 ⋅ 0,01 ≈ 1,06.

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим:

1,02 3,01 ≈ 1,061418168. ►

**Задания для самостоятельной работы**

24.1. Найдите частные и полные приращения данных функций в данных точках (или при переходе от точки М0 к точке М1):

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

24.2. Найдите частные производные функций.





24.3.  докажите, что .

24.4.  докажите, что .

24.5.  докажите, что 

24.6.  докажите, что .

24.7. Найдите производную , если , где , .

24.8. Найдите , , если , где .

24.9. Найдите , если , где , .

24.10. Найдите полные дифференциалы функций.



24.11. Найдите полный дифференциал функции  трех переменных *х*, *у*, *z*.

24.12. Найдите полное приращение и полный дифференциал функции *z = xy* в точке (2; 3) при Δ*х* = 0,1, Δ*у* = 0,2.

24.13. Найдите полный дифференциал функции  в точке с координатами *х* = 1, *у* = – 2, *z* = – 1 при Δ*х* = 0,1, Δ*у* = 0,2, Δ *z* = 0,5.

24.14. Вычислите, приближено:

а) 1,04 2,03; б) ; в) ; г) ln(0,09 3 + 0,99 3).

**Тема 25. «Двойные интегралы»**

**Примеры решения задач**

***Пример 1*.** Вычислите двойной интеграл, где D={(x; y)|1 ≤ x ≤ 2;1 ≤ y ≤ 2}.

* Решение. По формуле (1) имеем

=

.►

***Пример 2*.** Вычислите двойной интеграл ******, где

G = {(x; y) | о ≤ x ≤ ≤1; x ≤ y ≤ 2-х2}.

* Решение. Область ограничена слева и справа прямыми х = 0 и х = 1; у =х,

у = 2 – х2 – уравнения линий, ограничивающих эту область снизу и сверху.

|  |  |
| --- | --- |
| По формуле (2) имеем  1  1  у  х  ***.***  Вычисляем внутренний интеграл, считая х постоянным, а затем вычисляем внешний интеграл по у. |  |



**Задания для самостоятельной работы**

25.1. Вычислите двойные интегралы по указанным прямоугольникам D.



 ;





25.2. Вычислите двойные интегралы по областям G, ограниченным указанными линиями.



.

25.3. Вычислите двойной интеграл , где G – треугольник с вершинами О(0;0), В(0;1), А(1;1).

25.4. Вычислите двойной интеграл , где область G ограниченна параболами *у = х – х2 , у = 1 – х2* и осью ОУ.

25.5. Вычислите интегральное среднее значение функции *z* = 12 – 2 *x* – 3*y*  в области D, ограниченной прямыми 12 – 2*х* – 3*у* = 0, *х* = 0, *у* = 0.

25.6. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями *x2 + y2 – z + 1= 0* и

*x2 + y2 + 3 z – 7= 0*.

25.7. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями *у = 1 + x2 , z = 3х,*  *y= 5, z = 0*.

25.8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями *х=4у – у2* и *х + у=6*.

25.9. Вычислите площадь поверхности цилиндра *x2 = 2z*, отсеченный плоскостями *у* = 2*х* и *х* = .

25.10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми *у* 2 = 2*х* и *у* = *х*.

25.11. Вычислите площадь параболического сегмента АОВ параболы *у* = *ах* 2 и отрезком ВА, соединяющим точки В(–1; 2) и В(1; 2).

**9. Методические рекомендации  по подготовке, защите докладов**

**Доклад** – публичное сообщение, представляющее собой развёрнутое изложение определённой темы.

**Этапы подготовки доклада:**

1. Определение цели доклада.
2. Подбор необходимого материала, определяющего содержание доклада.
3. Составление плана доклада, распределение собранного материала в необходимой логической последовательности.
4. Общее знакомство с литературой и выделение среди источников главного.
5. Уточнение плана, отбор материала к каждому пункту плана.
6. Композиционное оформление доклада.
7. Заучивание, запоминание текста доклада, подготовки тезисов выступления.
8. Выступление с докладом.
9. Обсуждение доклада.
10. Оценивание доклада

**Композиционное оформление доклада** – это его реальная речевая внешняя структура, в ней отражается соотношение частей выступления по их цели, стилистическим особенностям, по объёму, сочетанию рациональных и эмоциональных моментов, как правило, элементами композиции доклада являются: вступление, определение предмета выступления, изложение (опровержение), заключение.

Выступление состоит из следующих частей:

**Вступление**   помогает обеспечить успех выступления по любой тематике. Вступление должно содержать:

- название  доклада;

- сообщение основной идеи;

- современную оценку предмета  изложения;

- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;

- интересную для слушателей форму изложения;

- акцентирование оригинальности  подхода.

**Основная часть,** в которой выступающий должен  раскрыть суть темы, обычно строится по принципу отчёта. Задача основной части: представить достаточно данных для того, чтобы слушатели заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами.

**Заключение** - это чёткое обобщение и краткие выводы по излагаемой теме.

**Виды самостоятельной работы**

* *Подготовка доклада по теме «Приложения производной»*
* *Подготовка сообщения по теме «Применение комплексных чисел»*
* *Подготовка сообщения по теме «Применение несобственных интегралов»*
* *Подготовка доклада по теме «Абсолютная и условная сходимость числовых рядов»*

**Литература**

1. В.П.Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. –М.: Академия, 2014
2. Григорьев С.Г., Задулина С.В. Математика –М.: ОИЦ «Академия, 2013
3. Яковлев Г.Н. (под редакцией). Математика (2 книги) –М.: ИД «Оникс», 2013
4. И.Л. Соловейчик. В.Т. Лисичкин. Сборник задач по математике для техникумов. –М.: «Мир и образование», 2013