

Федеральное агентство по образованию
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕПЛОТЕХНИКА

Сборник задач по теплообмену

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по
университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
140400 «Техническая физика»*

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 536.24 : 621.184 (075.8)

ББК 31.3я73

Т 342

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ
Л. Ш. Цемехман (ООО «Институт Гипроникель»).

Доктор технических наук, профессор СПбГПУ С.З. Сапожников

Теплотехника. Сборник задач по тепломассообмену: Учеб. пособие/
Юркинский В.П., Фирсова Е. Г., Сладков И.Б., Зайцев В.А. СПб.: Изд-во
Политехн. ун-та, 2007. с. 93.

В сборнике собраны задачи по основным разделам курса «Теплотехника. Тепломассоперенос». В начале каждой главы приведены основные теоретические формулы, необходимые для решения задач, представлен справочный материал в форме таблиц или графиков. Для всех типовых задач приведены примеры и подробно рассмотрено их решение.

Сборник предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся на факультетах теплотехнического профиля по направлению подготовки 140400 «Техническая физика», и соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теплотехника» направления бакалаврской подготовки 550500 «Металлургия».

Табл. 3. Ил. 29. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый сборник задач соответствует программе курса «Теплотехника. Тепломассоперенос» и предназначен для студентов факультетов теплотехнического профиля, изучающих данный курс в рамках бакалаврской подготовки по направлению подготовки 140400 «Техническая физика» и соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теплотехника» направления бакалаврской подготовки 550500 «Металлургия».

В качестве основы данного учебного пособия использован сборник задач и примеров, изданный под редакцией А.И. Бухбиндера в 1976 г.

В начале каждой главы в краткой форме приведены и проанализированы основные теоретические формулы, относящиеся к рассматриваемому разделу. Для всех типов задач приведены характерные примеры и рассмотрены их подробные решения. При необходимости представлен справочный материал в форме таблиц или графиков.

Большинство задач, приведенных в сборнике, является оригинальными, а часть заимствована из учебных пособий других авторов, сведения о которых представлены в библиографическом списке.

По мнению авторов, задачник можно использовать не только для практических занятий в аудитории, но также и для самостоятельной домашней работы студентов.

Часть задач, относящихся к разделам стационарной и нестационарной теплопроводности и диффузии, может быть рекомендована в качестве индивидуальных расчетных студенческих домашних заданий.

Авторы выражают глубокую благодарность заведующему кафедрой «Теоретические основы теплотехники» СПбГПУ, профессору, доктору технических наук, лауреату премии Госкомобразования СССР С.З. Сапожникову и профессору, доктору технических наук, заслуженному деятелю науки РФ Л. Ш. Цемехману за внимательное рецензирование данной рукописи.

1. ЗАКОНЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Закон молекулярной теплопроводности

Молекулярная теплопроводность имеет место в неподвижной среде. Закон молекулярного теплопереноса эмпирическим путем был установлен **Фурье**:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dn} = -\lambda \text{grad}T, \quad (1.1)$$

где q – **вектор плотности теплового потока** (представляет собой количество тепла, проходящее через единицу поверхности за единицу времени), [Дж/(м²·с) или Вт/м²]; λ – **коэффициент теплопроводности**, который характеризует теплопроводность среды и является физической константой. Количественно λ определяет тепловой поток (Вт), проходящий через единицу поверхности (м²) при единичном градиенте температуры (К/м) и имеет следующую размерность:

$$[\lambda] = \left[\frac{q}{dT/dn} \right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В соответствии с законом Фурье (1.1) плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры. Знак «−» показывает, что тепловой поток направлен в противоположном направлении относительно направления градиента температуры.

Коэффициент теплопроводности зависит от природы вещества, температуры и ряда других факторов. Сопоставление значений теплопроводности различных материалов показывает, что максимальной теплопроводностью обладают металлы и их сплавы, а минимальной – газы.

Закон молекулярной диффузии

Как и в случае теплопроводности, молекулярная диффузия имеет место в неподвижной среде.

В основе теории молекулярной диффузии лежит эмпирический **закон Фика**:

$$j = -D \frac{dC}{dn} = -D \operatorname{grad} C, \quad (1.2)$$

здесь j – вектор плотности диффузионного потока [кг/(м²·с)]; C – концентрация диффундирующего вещества (кг/м³); D – **коэффициент диффузии**, размерность которого следующая:

$$[D] = \frac{[j]}{\left[\frac{dC}{dn}\right]} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{м}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

В соответствии с законом Фика (1.2) плотность диффузионного потока пропорциональна градиенту концентрации диффундирующего вещества.

Как и в случае молекулярного теплопереноса, знак «←» показывает, что диффузионный поток направлен в противоположном направлении относительно направления градиента концентрации.

Коэффициент диффузии D определяет массу вещества, переносимую в процессе диффузии через единицу поверхности за единицу времени при единичном градиенте концентрации.

Если молекулярная диффузия двух газов происходит при наличии твердой или жидкой поверхности (перпендикулярной направлению диффузии), которая оказывается непроницаемой для одного из компонентов, то возникает дополнительный конвективный поток газовой смеси от поверхности вверх. Такой случай реализуется при диффузии паров жидкости или твердого тела в поток газа, проходящего над поверхностью тела. В этих условиях закон Фика дополняется конвективной составляющей массопереноса:

$$j = D \frac{dC}{dn} + C v,$$

где v – скорость потока газовой смеси.

Учет конвективной составляющей приводит к уравнению для плотности диффузионного потока, называемому **уравнением Стефана**:

$$j_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} D \frac{dC_1}{dn}. \quad (1.3)$$

В этом уравнении символ 1 относится к пару вещества, а символ 2 – к газу, проходящему над твердой или жидкой поверхностью. При $C_1 \ll C_2$ (малолетучее вещество) уравнение Стефана переходит в закон Фика.

Переходя от концентраций компонентов к их парциальным давлениям, уравнение Стефана можно переписать в виде:

$$j_1 = \frac{D}{RT} \frac{p}{p-p_1} \frac{dp_1}{dn},$$

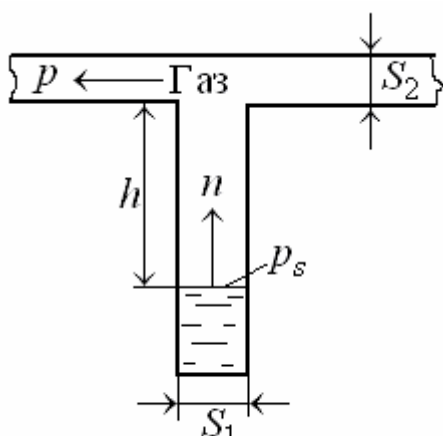


Рис. 1.1. К выводу уравнения Стефана

где p – общее давление парогазовой смеси.

Интегрирование этого уравнения для случая, когда проходящий над твердой или жидкой поверхностью газ первоначально не содержит паров этого вещества, приводит к следующему выражению для плотности диффузионного потока:

$$j_1 = \frac{Dp}{RT} \frac{[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}, \quad (1.4)$$

где p_s – давление насыщенного пара вещества; h – расстояние от твердой или жидкой поверхности до потока проходящего газа (рис. 1.1).

Если использовать значение универсальной газовой постоянной $R = 8,2 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3 \cdot \text{атм) / (моль} \cdot \text{К)}$ и подставлять значение коэффициента диффузии в $\text{м}^2/\text{с}$, давление в атм, температуру в градусах К, высоту в м, то плотность диффузионного потока будет иметь размерность

$$[j_1] = \text{моль} / (\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Закон молекулярного переноса количества движения

В курсе «Теплотехника» кроме молекулярного тепломассопереноса в неподвижных средах рассматриваются также конвективные процессы тепло- и массопереноса в движущейся жидкости.

При движении жидкости между ее слоями возникает сила внутреннего трения, обусловленная ее вязкостью. Напряжение силы трения определяется эмпирическим *законом Ньютона*:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}. \quad (1.5)$$

Величина τ имеет размерность в системе СИ

$$[\tau] = \text{Н/м}^2.$$

Вязкие свойства среды учитываются коэффициентом динамической вязкости μ , имеющим размерность

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{[dv/dn]} = \frac{\text{Н/м}^2}{\text{м/(с}\cdot\text{м)}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{(\text{м}\cdot\text{с})} = \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Соответственно за единицу динамической вязкости принимают величину:

$$1 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг}}{(\text{м}\cdot\text{с})} = 1 \text{Па}\cdot\text{с}.$$

Ранее в системе *CGS* за единицу динамической вязкости принимали

$$1 \text{ пуаз (1П): } 1\text{П} = 1 \frac{\text{г}}{(\text{см}\cdot\text{с})} \text{ и } 1 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{Па}\cdot\text{с} = 10\text{П}.$$

Анализ размерности величины τ

$$[\tau] = \text{Н/м}^2 = \text{кг}\cdot\text{м}/(\text{с}^2\cdot\text{м}^2) = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$$

показывает, что эта величина, наряду с напряжением трения, также имеет смысл плотности потока количества движения. Следовательно, в движущейся жидкости имеет место молекулярный перенос количества движения, определяемый значением τ . Учитывая противоположное направление векторов $-\tau$ и dv/dn - в правой части закона Ньютона (1.5), как в случае рассмотренных ранее законов теплопереноса, обычно записывают знак минус.

П Р И М Е Р Ы

1. Один из способов экспериментального определения вязкости среды заключается в определении усилия, которое требуется преодолевать при вращении в этой среде (с определенной скоростью) легкого металли-

-ческого цилиндра.

Определить вязкость жидкости, если для вращения цилиндра со скоростью $n = 100$ об/мин в жидкости, заполняющей стакан радиусом $R_{01} = 13$ см, требуется преодолеть сопротивление $F = 6 \cdot 10^{-4}$ Н. Размеры погруженного в жидкость цилиндра равны: радиус $R_{02} = 3$ см, высота $h = 10$ см.

Р е ш е н и е.

Напряжение трения на боковой поверхности цилиндра равно:

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{F}{2\pi R_{02}h} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{6,28 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 3,18 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}^2.$$

Линейная скорость вращения цилиндра составит:

$$v = 2\pi R_{02} n = \frac{6,28 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2}{60} = 0,314 \text{ м/с.}$$

Поскольку на стенке стакана жидкость неподвижна, градиент скорости равен:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{v - 0}{R_{01} - R_{02}} = \frac{0,314}{0,1} = 3,14 \text{ 1/с.}$$

Динамический коэффициент вязкости определится по закону Ньютона:

$$\mu = \tau / \frac{dv}{dn} = \frac{3,18 \cdot 10^{-2}}{3,14} = 0,01 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2 = 0,1 \text{ П.}$$

2. Тепловыделяющий элемент нагревательного устройства представляет собой фарфоровую трубку с внутренним радиусом $R_{01} = 10$ мм и толщиной стенки $\delta = 2$ мм, нагреваемую внутренним токонесущим стержнем с удельным сопротивлением материала $\rho = 4 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

Найти перепад температур на стенках трубки, если по стержню идет ток $I = 100$ А. Теплопроводность фарфора $\lambda = 1$ Вт/м·К.

Р е ш е н и е.

Перепад температур может быть определен по закону теплопроводности Фурье:

$$q = \lambda \frac{\Delta T}{\delta}.$$

Плотность теплового потока можно связать с мощностью тока и боковой поверхностью нагревательного элемента, через которую происходит перенос тепла, $S_{\text{бок}}$:

$$q = \lambda \frac{I^2 R}{S_{\text{бок}}} = \frac{I^2 R}{2\pi R_0 l},$$

где l – длина нагревательного элемента. С другой стороны, сопротивление стержня R можно выразить через его длину и площадь поперечного сечения $S_{\text{поп}}$:

$$R = \rho l / S_{\text{поп}} = \rho l / \pi R_0^2.$$

Тогда

$$q = \frac{I^2 \rho l}{2\pi R_0 l \cdot \pi R_0^2} = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3},$$

или

$$\lambda \frac{\Delta T}{\delta} = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3}.$$

Откуда

$$\Delta T = \frac{I^2 \rho \delta}{2\pi^2 R_0^3 \lambda} = \frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 1} = 4^\circ.$$

3. Чистый водород получают диффузией этого газа через палладий при повышенных температурах. Определить массовую (в молях за час) и объемную (в литрах за минуту) производительность палладиевой мембраны радиусом $R_0 = 10$ см и толщиной $\delta = 0,1$ мм, если давления водорода по обе стороны от мембраны $p_1 = 5$ атм и $p_2 = 1$ атм. Рабочая температура палладиевого диффузора $T_1 = 527$ °С, коэффициент диффузии водорода через палладий при этой температуре $D = 3 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Температура чистого водорода, выходящего из диффузора, $T_2 = 27$ °С. Считать водород идеальным газом.

Р е ш е н и е.

Производительность палладиевой мембраны или диффузионный

поток водорода равны: $J = jS$, где j – плотность диффузионного потока, которая по закону Фика равна:

$$j = D \frac{dC}{dn}$$

Перейдем от концентраций к давлениям: $C_1 = p_1/RT_1$; $C_2 = p_2/RT_1$.

Тогда градиент концентрации составит:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dn} &= \frac{C_2 - C_1}{\delta} = \frac{p_2 - p_1}{RT_1 \delta} = \frac{4}{8,2 \cdot 10^{-5} \cdot 800 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = \frac{4}{65,6 \cdot 10^{-7}} = \\ &= 6,1 \cdot 10^5 \text{ моль/м}^4; \end{aligned}$$

плотность диффузионного потока водорода:

$$j = 3 \cdot 10^{-7} \cdot 6,1 \cdot 10^5 = 0,183 \text{ моль/(м}^2 \cdot \text{с)};$$

массовая производительность диффузора

$$J = jS = j\pi R_0^2 = 0,183 \cdot \pi \cdot 0,1^2 = 5,746 \cdot 10^{-3} \text{ моль/с.}$$

Если время выражать в часах, то

$$J = 5,746 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 20,686 \text{ моль/ч.}$$

Объемный расход (производительность) равен:

$$Q = J \frac{RT^2}{p} = 20,686 \cdot 0,082 \cdot 300 / 1 = 508,8 \text{ л/ч.}$$

Если время выражать в минутах, то $Q = 8,48$ л/мин.

4. Определить состав парогазовой смеси, выходящей из диффузионного дозатора с жидким четыреххлористым кремнием (см. рис. 1.1), через который проходит водород под атмосферным давлением. Расход водорода через дозатор $J = 0,1$ л/мин. Размеры дозатора: $S_1 = 1 \text{ см}^2$, $S_2 = 1 \text{ см}^2$, $h = 10$ см. Температура дозатора $20 \text{ }^\circ\text{C}$, при данной температуре давление насыщенного пара четыреххлористого кремния составляет $p_s = 200$ мм рт. ст., а коэффициент диффузии паров SiCl_4 в водороде $D = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Р е ш е н и е.

Содержание паров четыреххлористого кремния в водороде, выраженное в объемных процентах, составит:

$$x = \frac{j(\text{SiCl}_4)}{j(\text{SiCl}_4) + j(\text{H}_2)} \cdot 100 \text{ об. \%},$$

где j – плотность диффузионного потока в $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

Для водорода $j(\text{H}_2) = J/S_2$. Для четыреххлористого кремния по уравнению (1.4) имеем:

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{Dp}{RT} \frac{[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}.$$

Из этой формулы плотность диффузионного потока получается в моль/ $(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Чтобы получить ее в объемных единицах, следует воспользоваться уравнением состояния идеального газа $pV = nRT$ и умножить правую часть на RT/p . Тогда получим:

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{D[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}.$$

Вычисляем:

$$j(\text{H}_2) = \frac{0,1}{1} = 0,1 \text{ л} / (\text{см}^2 \cdot \text{мин}) = 0,0167 \text{ м}^3 / (\text{м}^2 \cdot \text{с});$$

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot [-\ln(1 - 200 / 760)]}{10} = 0,92 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 / (\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Содержание паров четыреххлористого кремния в водороде составит:

$$x = \frac{0,92 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{0,0167 + 0,92 \cdot 10^{-4}} = 0,547 \text{ об. \%}.$$

ЗАДАЧИ

1.1. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено воздухом, находящимся при комнатной температуре. Внешний цилиндр приводится во вращение силой $F = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$.

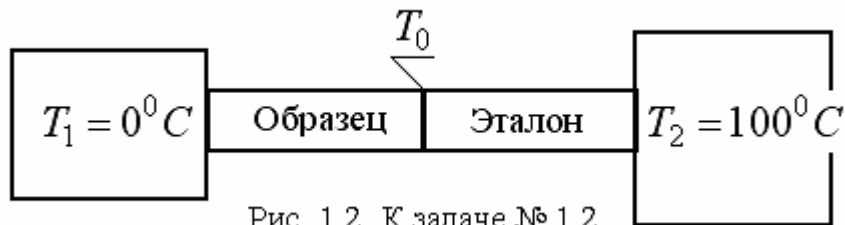
С какой скоростью будет вращаться внутренний цилиндр, если в установившемся режиме скорость вращения внешнего цилиндра $n = 1000$ об/мин?

Размеры внешнего цилиндра: высота $h_1 = 10 \text{ см}$, радиус $R_{01} = 10 \text{ см}$.

Соответствующие размеры внутреннего цилиндра равны $h_2 = 10$ см и $R_{02} = 8$ см. Динамическую вязкость воздуха принять равной $2 \cdot 10^{-4}$ П.

1.2. Один из методов определения теплопроводности твердых тел заключается в следующем. Два цилиндрических стержня, один из исследуемого материала, а другой из эталонного, соосно размещаются между двумя резервуарами, обеспечивающими поддержание постоянной температуры на концах стержней. Обычно используются медные резервуары, в одном циркулирует кипящая вода, в другом смесь воды со льдом (рис. 1.2). По достижении стационарного состояния измеряют температуру на стыке цилиндров T_0 .

Определить теплопроводность образца λ_x , если $T_0 = 30$ °С, тепло-



проводность эталона $\lambda_э = 100$ Вт/(м·К). Боковые поверхности цилиндров хорошо теплоизолированы.

1.3. Температура нагревательного элемента электрической печи (радиус $R_0 = 1$ см, удельное сопротивление материала $\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ Ом·см) измеряется термопарой, находящейся в кварцевом колпачке, толщина кварца $\delta = 1$ мм, его удельная теплопроводность $\lambda = 0,02$ Вт/(м·К).

Определить истинную температуру поверхности T_{Π} нагревательного элемента, если термопара показывает температуру $T_T = 1200$ °С при токе через элемент $I = 100$ А.

1.4. Слиток осмия весом 100 г (начальная температур $T_0 = 20$ °С) нагревается в герметичном цилиндрическом контейнере из двуокиси циркония размерами внутренней полости: радиус $R_0 = 3$ см, высота $h = 10$ см, толщина стенок $\delta = 5$ мм.

Определить время t , за которое расплавится металл, если перепад температур на стенках контейнера поддерживается постоянным и равным

$$\Delta T = 100 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Теплофизические характеристики осмия: $T_{\text{пл}} = 2700 \text{ }^\circ\text{C}$, $Q_{\text{пл}} = 140 \text{ Дж/г}$, средняя теплоемкость $C_p = 0,13 \text{ Дж/(г}\cdot\text{К)}$. Теплопроводность двуокиси циркония $\lambda = 1,2 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

1.5. Температура плавиковой кислоты, проходящей по трубопроводу, измеряется термометром, помещенным во фторопластовую цилиндрическую гильзу, заполненную маслом (рис. 1.3). Термометр показывает температуру $T_T = 29,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить истинную температуру T плавиковой кислоты, если масло в гильзе нагревается за счет передачи тепла через гильзу на 5 ° за 12 мин .

Теплоемкость масла $C_p = 1,26 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$, объем масла в гильзе $V = 10 \text{ мл}$, плотность масла

$\rho = 800 \text{ кг/м}^3$. Теплопроводность фторопласта $\lambda = 0,1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Перепадом температуры в слое масла пренебречь.

1.6. Антикатоде рентгеновской трубки представляет собой цилиндрический стержень длиной $l = 300 \text{ мм}$ и радиусом $R_0 = 10 \text{ мм}$.

Определить разницу в температурах, горячего и холодного концов антикатада, если через боковую поверхность стержня тепло не передается, а холодный конец омывается проточной водой, которая нагревается на $1,5^\circ$ при расходе 1 л/мин .

Теплопроводность стержня $\lambda = 100 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. $C_{p,\text{H}_2\text{O}} = 4,2 \text{ Дж/(г}\cdot\text{К)}$.

1.7. Водород диффундирует через пластину из медно-палладиевого сплава при температуре $T = 327 \text{ }^\circ\text{C}$ и давлении на противоположных сторонах пластины 6 и 1 атм .

Соответственно определить, какую площадь S должна иметь пластинка толщиной $\delta = 0,2 \text{ мм}$, чтобы обеспечить поток водорода $0,002 \text{ моль/ч}$. Коэффициент диффузии водорода через сплав составляет $D = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$.

1.8. Плотность диффузионного потока водорода через никелевую пластину толщиной $\delta = 1 \text{ мм}$ при температуре $T = 627 \text{ }^\circ\text{C}$ и перепаде

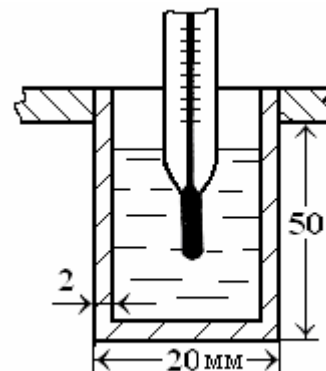


Рис. 1.3. К задаче № 1.5

давлений по обе стороны пластины $\Delta p = 1$ атм составляет 10 микролитров (при 0°C) на см^2 за минуту. Определить коэффициент диффузии D водорода через никель.

1.9. Пластинка окиси магния (MgO) протравливается в проточном растворе серной кислоты с концентрацией $C_0 = 1$ моль/л. Процесс растворения окиси магния лимитируется

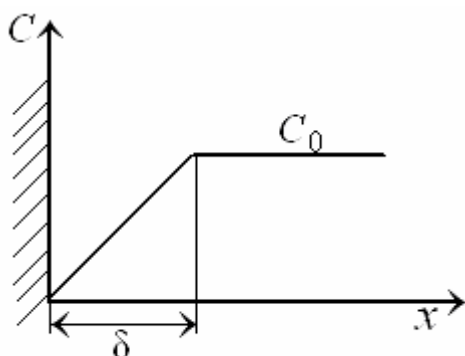


Рис. 1.4. К задаче № 1.9

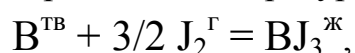
диффузией серной кислоты из глубины раствора к поверхности пластины (коэффициент диффузии H_2SO_4 в воде $D = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$).

Сколько миллиметров окиси магния стравится за 5 мин, если распределение концентрации кислоты по глубине раствора имеет вид, показанный на

рис. 1.4. Толщина диффузионного слоя $\delta = 2$ мм. Плотность окиси магния $\rho = 3600 \text{ кг/м}^3$, а ее молярная масса $M = 40 \text{ г/моль}$.

Указание. Толщина стравленного слоя Δ связана с потерей массы оксида магния соотношением: $\Delta = m/2\rho S$.

1.10. Ампула, заполненная аргоном и содержащая на одном конце навеску бора, а на другом – навеску йода, нагревается в печи до температуры 400 К . При этой температуре протекает реакция:



скорость которой лимитируется диффузией паров йода с одного конца ампулы в другой.

Определить, какое количество трийодида бора образуется за один час, если при этой температуре давление паров йода $p = 200 \text{ мм рт. ст.}$, а коэффициент диффузии паров йода в аргоне $D = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$. Диаметр ампулы $2R_0 = 3 \text{ см}$, расстояние между месторасположением навесок $l = 10 \text{ см}$.

Молярные массы йода и бора принять равными 127 г/моль и 11 г/моль . Считать пары йода идеальным газом.

1.11. При каком расходе аргона J (в л/мин) через диффузионный дозатор с диэтиловым эфиром парогазовая смесь на выходе из дозатора будет содержать 2 мол. % диэтилового эфира. Аргон проходит через дозатор под атмосферным давлением. Размеры дозатора: сечение $S_1 = 2 \text{ см}^2$, высота $h = 25 \text{ см}$ (см. рис. 1.1). Температура дозатора $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, при данной температуре давление насыщенного пара диэтилового эфира $p_s = 440 \text{ мм рт. ст.}$, коэффициент диффузии паров диэтилового эфира в аргоне $D = 0,35 \text{ см}^2/\text{с}$.

Указание. Для решения воспользоваться интегральной формой уравнения Стефана.

2. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Существуют два метода описания движения жидкости. Один из них, называемый *методом Лагранжа*, сводится к определению траекторий движения каждой частицы жидкости. Дифференцирование уравнений, описывающих траекторию частицы, по времени позволяет определить ее скорость и ускорение.

Другой, более распространенный метод анализа движения жидкости, именуемый *методом Эйлера*, заключается в исследовании зависимости скоростей от времени t и от координат x, y, z точек пространства:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t); \\ v_y &= v_y(x, y, z, t); \\ v_z &= v_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Данные уравнения описывают поле скоростей. Ускорение жидкой частицы в методе Эйлера находят посредством дифференцирования уравнений (2.1) по времени, рассматривая при этом скорость как сложную функцию времени t , зависящую от него как явно, так и опосредованно через координаты x, y, z , в свою очередь являющиеся функциями времени:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x,$$

и аналогично для проекций на оси y и z .

Геометрической характеристикой потока в методе Эйлера является линия тока.

Линия тока – это линия, касательные которой в любой точке совпадают с направлением вектора скорости в данный момент времени. Дифференциальное уравнение линии тока имеет вид:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (2.2)$$

В случае стационарного движения жидкости линии тока совпадают с траекториями частиц.

Объемный расход жидкости через сечение S определяется потоком вектора скорости через это сечение:

$$Q = \int_S v_n dS = \int_S v \cdot n dS = \text{const}.$$

Скорость относительного объемного расширения жидкости в данной точке:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } v \quad (2.3)$$

Движение жидкости, не сопровождающееся вращением ее частиц ($\omega = \text{rot } v = 0$), называется безвихревым. Такое движение называют также потенциальным, так как для него характерно существование потенциала скорости φ :

$$v = \text{grad } \varphi$$

или
$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Геометрической характеристикой вихревого движения ($\text{rot } v \neq 0$) является вихревая линия, дифференциальные уравнения которой имеют вид

$$\frac{dx}{\text{rot}_x v} = \frac{dy}{\text{rot}_y v} = \frac{dz}{\text{rot}_z v}. \quad (2.5)$$

Составляющие вихря вектора скорости описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x v &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_y v &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ \operatorname{rot}_z v &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вихревые линии, проведенные через все точки контура, взятого в вихревом поле, образуют вихревую поверхность. Часть жидкости, ограниченная вихревой поверхностью, охватывающей замкнутый контур, представляет собой вихревую трубку. Поток вектора вихря скорости через сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени для всех сечений трубки. Эту величину называют интенсивностью вихревой трубки:

$$i = \int_S \operatorname{rot} v \cdot n dS.$$

Интенсивность вихревой трубки можно определить как циркуляцию скорости Γ по контуру, опоясывающему вихревую трубку:

$$\Gamma = \oint_L v \cdot dr = \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_S \operatorname{rot} v \cdot n dS. \quad (2.7)$$

П Р И М Е Р Ы

1. Траектория жидкой частицы задана уравнениями:

$$x = y = z = at^2,$$

где $a = 0,03 \text{ м/с}^2$.

Определить величину скорости жидкой частицы через 10 с после начала ее движения.

Р е ш е н и е.

Компоненты скорости определяются дифференцированием координат по времени:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (0,03t^2) = 0,06t; \quad v_y = 0,06t \quad \text{и} \quad v_z = 0,06t.$$

Величина скорости определяется следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(0,06t)^2 + (0,06t)^2 + (0,06t)^2} = 0,104t.$$

Следовательно, через $t=10$ с получим: $v = 0,104$ м/с.

2. Стационарное поле скоростей задано следующим образом:

$$v_x = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$v_y = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$v_z = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Найти уравнения линий тока.

Указание. Q – постоянная величина.

Решение.

Используя дифференциальное уравнение (2.2) и учитывая значения компонентов скорости, получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя далее эти уравнения, находим:

$$\ln y = \ln x + \ln C_1; \quad \ln z = \ln x + \ln C_2,$$

или $y = C_1x$ и $z = C_2x$.

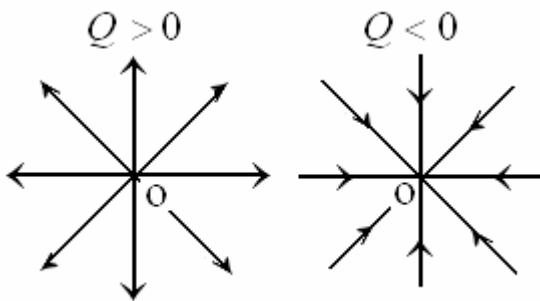


Рис. 2.1. К примеру № 2

Первое из этих уравнений геометрически изображается семейством плоскостей, проходящих через ось z , а второе – семейством плоскостей, проходящих через ось y .

Линии тока лежат на пересечении этих плоскостей. Они пред-

ставляют собой прямые, проходящие через начало координат (рис. 2.1).

Так как поток стационарен, то линии тока совпадают с траекториями

частиц жидкости. При положительном значении Q движение жидкости будет направлено из начала координат наружу. Тогда точка O является центром источника жидкости. Если же Q отрицательно, то движение частиц будет направлено радиально внутрь и тогда точка O будет центром стока жидкости.

Постоянная $Q = 4\pi r^2 v$ представляет собой объемный расход жидкости.

3. Проекции скоростей при стационарном движении определяются уравнениями:

$$v_x = 2x^2 + y; \quad v_y = 2y^2 + z; \quad v_z = 2z^2 + x.$$

Определить относительную скорость объемного расширения жидкости в точке A с координатами $x = 2; y = 3; z = 5$ (м).

Р е ш е н и е.

Скорость относительного объемного расширения жидкости в данной точке определяется уравнением (2.3) :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt}(\Delta V) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z}(2z^2 + x) = 4x + 4y + 4z. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} v_A = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 40 \text{ с}^{-1}.$$

4. Определить, будет ли вихревым или потенциальным движение жидкости, если проекции скоростей частиц при установившемся движении заданы следующими уравнениями:

$$v_x = 2xy; \quad v_y = 2yz; \quad v_z = 2zx.$$

Р е ш е н и е.

В случае безвихревого (потенциального) потока должны выполняться следующие условия:

$$\operatorname{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{rot}_y v = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0;$$

$$\operatorname{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

В данном случае $\operatorname{rot}_x v = -2y$, $\operatorname{rot}_y v = -2z$, $\operatorname{rot}_z v = -2x$, т. е. компоненты вектора вихря скорости не равны нулю. Следовательно, движение вихревое.

5. Какова скорость движения потока, потенциал скорости которого выражается уравнением

$$\varphi = 2x - 3y?$$

Р е ш е н и е.

Компоненты вектора скорости связаны с потенциалом скорости уравнением (2.4). Имеем:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) = 2; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4 + 9} = 3,62 \text{ м/с.}$$

6. Поле скоростей при установившемся движении описывается уравнениями:

$$v_x = y + 2; \quad v_y = z + 2x; \quad v_z = x + 2y.$$

Найти уравнения, определяющие вихревые линии в потоке.

Р е ш е н и е.

Используя заданное поле скоростей, находим по уравнениям (2.6) компоненты вихря скорости:

$$\operatorname{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2 - 1 = 1;$$

$$\operatorname{rot}_y v = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2 - 1 = 1;$$

$$\operatorname{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2 - 1 = 1.$$

Дифференциальные уравнения вихревых линий [уравнения (2.5)] принимают вид: $dx = dy$; $dz = dy$.

В результате их интегрирования получим:

$$x = y + C_1; \quad z = y + C_2.$$

7. Определить интенсивность вихревой трубки, сечением которой является окружность радиусом $R = 0,3$ м, если скорость во всех точках окружности направлена по касательной и равна $2,0$ м/с.

Р е ш е н и е.

Интенсивность вихревой трубки в соответствии с уравнением (2.7) равна циркуляции скорости по контуру, опоясывающему вихревую трубку.

$$\begin{aligned} i &= \int_s \operatorname{rot} v \cdot n dS = \oint_L v \cdot dr = \oint_L v \cos(v \wedge dr) dl = \oint_L 2 \cos 0 dl = \\ &= \int_0^{2\pi R} 2 dl = 4\pi R = 4\pi \cdot 0,3 = 3,77 \text{ м}^2/\text{с}. \end{aligned}$$

З А Д А Ч И

2.1. Найти скорость движения жидкой частицы через 20 с после начала движения, если траектории движения ее заданы следующими уравнениями:

$$x = 3 + \sqrt{0,2t^3}; \quad y = 1,5 + 0,04\sqrt{t^3}; \quad z = 3,0.$$

2.2. Найти уравнения для скорости частиц жидкости, траектории которых описываются уравнениями: $x = a \cdot \cos t$; $y = b \cdot \sin t$.

2.3. Поле скоростей установившегося потока жидкости задано следующим образом:

$$v_x = -\frac{\Gamma \cdot y}{2\pi(x^2 + y^2)}; \quad v_y = \frac{\Gamma \cdot x}{2\pi(x^2 + y^2)}; \quad v_z = 0.$$

Найти уравнения линий тока и выражение для скорости частиц в потоке.

Указание. Γ – постоянная величина.

2.4. Проекция вектора скорости представлены уравнениями:

$$v_x = -\frac{Q \cdot x}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_y = -\frac{Q \cdot y}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_z = 0.$$

Составить уравнения для линий тока и найти скорость в точке A с координатами: $x = 1; y = 5$ (м).

Указание. Q – постоянная величина.

2.5. Найти уравнения для компонентов вектора скорости и линий тока в случае потенциального потока, для которого потенциал скорости задан уравнением: $\varphi = 3xy$.

2.6. Установившийся плоский поток жидкости задан проекциями скоростей на оси координат: $v_x = \frac{2x}{\sqrt{r}}; v_y = \frac{2y}{\sqrt{r}}$.

Найти уравнение линий тока.

2.7. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = x + 2; v_y = y + 3; v_z = z + 1.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.8. Установившийся поток жидкости характеризуется уравнениями:

$$v_x = x^2; v_y = y^2; v_z = z^2.$$

Найти уравнения линий тока.

2.9. По условию предыдущей задачи составить уравнение линии тока, проходящей через точку A с координатами: $x = 1; y = 3$ и $z = 4$.

2.10. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = ax; v_y = by; v_z = 0.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.11. Поле скоростей определяется следующими уравнениями:

$$v_x = a; v_y = b; v_z = c.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.12. Проекции вектора скорости при установившемся движении передаются уравнениями:

$$v_x = 2x^2 + 1; v_y = 4y^2 + 2; v_z = 6z^2 + 3.$$

Найти относительную скорость объемного расширения жидкости в точке A с координатами: $x = 3; y = 2$ и $z = 1$.

2.13. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = x^2 + y^2; \quad v_y = y^2 + z^2; \quad v_z = x^2 + z^2.$$

Составить уравнение неразрывности.

2.14. Определить поле скоростей потока, для которого потенциал скорости задан уравнением: $\varphi = 2x^2 + 4y^2$.

2.15. Найти скорость в точке потока A с координатами $x = 5$ и $y = 8$, если потенциал скорости задан уравнением: $\varphi = 4(x^2 - y^2)$.

Составить уравнение эквипотенциальной поверхности.

2.16. Для условий задачи № 2.6 определить потенциал скорости и найти уравнение эквипотенциальной поверхности.

2.17. Скорость частиц жидкости задается следующими уравнениями:

$$v_x = C\sqrt{y^2 + z^2}; \quad v_y = v_z = 0.$$

Найти уравнение вихревых линий.

2.18. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = -\frac{C \cdot y}{x^2 + y^2}; \quad v_y = \frac{C \cdot x}{x^2 + y^2}; \quad v_z = 0.$$

Установить, является ли движение вихревым или безвихревым?

2.19. Потенциал скорости задан уравнением: $\varphi = x^2 + y^2$.

Найти уравнения для поля скоростей и линий тока.

2.20. Поле скоростей задано уравнениями: $v_x = Cy; \quad v_y = 0$.

Определить циркуляцию скорости по окружности радиусом R .

3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости.

Уравнение Бернулли, представляющее собой частный случай общего закона сохранения и превращения энергии, записывается для двух сечений потока жидкости в виде приведенных ниже форм:

$$\text{a) } \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (3.1)$$

где $\frac{v^2}{2}$ – кинетическая, а gz и p/ρ – потенциальные энергии единицы массы жидкости, связанные с действием силы тяжести и давления соответственно;

$$\text{б) } \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}, \quad (3.2)$$

здесь $\frac{v^2}{2g}$, z и p/γ имеют размерность длины [м] и называются поэтому скоростной, геометрической (или нивелирной) и пьезометрической высотами, соответственно. В энергетическом смысле каждое слагаемое уравнения (3.2) выражает удельную энергию, т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости;

$$\text{в) } \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = \text{const}. \quad (3.3)$$

Каждому члену уравнения (3.3) присвоено название напора: первому – скоростного или динамического, второму – высотного или геометрического, а третьему – пьезометрического.

Часто при использовании уравнения Бернулли приходится прибегать к закону постоянства расхода (уравнение неразрывности), который для жидкости может быть записан в виде:

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \dots = S_n v_n = \text{const}, \quad (3.4)$$

где v_1, v_2, \dots, v_n – средние скорости в соответствующих сечениях потока S_1, S_2, \dots, S_n .

К числу процессов, описываемых уравнением Бернулли, относится процесс истечения несжимаемой жидкости из большого сосуда через малое отверстие. Применение этого уравнения к определению скорости истечения жидкости из открытого сосуда приводит к формуле:

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (3.5)$$

Это формула Торричелли. Здесь H – высота столба жидкости над отверстием.

Соответственно уравнение расхода жидкости приобретает вид

$$Q = S\sqrt{2gH}, \quad (3.6)$$

где S – площадь сечения отверстия.

Уравнение Бернулли для вязкой жидкости

Для определения скорости истечения реальной (вязкой) жидкости пользуются формулой: $v = \varphi\sqrt{2gH}$. (3.7)

Здесь φ – безразмерный коэффициент скорости, определяемый по выражению:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \xi}}, \quad (3.8)$$

где ξ – коэффициент сопротивления отверстия, учитывающий потери напора при истечении.

Степень сжатия струи, вытекающей из отверстия, характеризуется коэффициентом сжатия ε :

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \frac{d_c^2}{d_0^2}, \quad (3.9)$$

где S_c, d_c – площадь и диаметр сжатого сечения струи, а S_0, d_0 – площадь и диаметр отверстия.

Расход жидкости через отверстие определяется по формуле:

$$Q = \mu^* S_0 \sqrt{2gH}, \quad (3.10)$$

где μ^* – коэффициент расхода, равный:

$$\mu^* = \varepsilon\varphi. \quad (3.11)$$

Значения коэффициентов истечения μ^* , ε и φ для круглого отверстия зависят от формы его кромок, условий потока жидкости к отверстию и характера движения.

П Р И М Е Р Ы

1. Найти давления в сечениях трубопровода, указанных на рис. 3.1, если расход воды по трубопроводу $Q = 2,5$ л/с, а истечение жидкости происходит в атмосферу ($p_{\text{атм}} = 1$ атм). Действием сил вязкости пренебречь.

Решение.

Запишем интеграл Бернулли (3.2) для сечений 2 – 2 и 3 – 3:

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\gamma}.$$

Учтя, что $p_3 = p_{\text{атм}} = 1$ атм (истечение воды происходит в атмосфере-

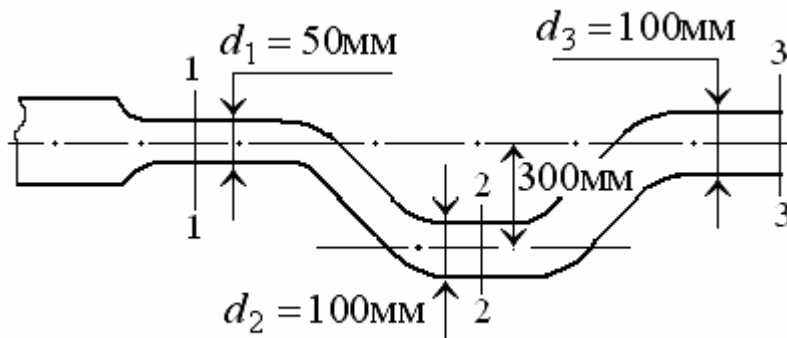


Рис. 3.1. К примеру № 1

ру), $z_2 = 0$ (отсчет высоты производится от оси трубы во втором сечении) и $v_2 = v_3$, что следует из уравнения (3.4), поскольку $S_2 = S_3$, имеем:

$$\frac{p_2 - p_{\text{атм}}}{\gamma} = z_3.$$

Или $p_2 = p_{\text{атм}} + z_3 \gamma = 9,81 \cdot 10^4 + 0,3 \cdot 9,81 \cdot 10^3 = 10,1 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1,03$ атм.

Запишем далее интеграл Бернулли (3.2) для сечений 1 – 1 и 3 – 3:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\gamma}.$$

Здесь, $z_1 = z_3$, $p_3 = p_{\text{атм}}$, а скорости v_1 и v_3 можно выразить через величину расхода Q из уравнения (3.4):

$$v_1 = \frac{Q}{S_1}, v_3 = \frac{Q}{S_3}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{p_1 - p_{\text{атм}}}{\gamma} = \frac{v_3^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gS_1^2} \left(\frac{S_1^2}{S_3^2} - 1 \right);$$

или

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_{\text{атм}} + \gamma \left[\frac{Q^2}{2gS_1^2} \left(\frac{S_1^2}{S_3^2} - 1 \right) \right] = p_{\text{атм}} + \gamma \left[\frac{Q^2 \cdot 4^2}{2g\pi^2 d_1^4} \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4 - 1 \right] = \\
&= 9,81 \cdot 10^4 + 9,81 \cdot 10^3 \left[\frac{2,5^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2}{2 \cdot 9,81 \cdot \pi^2 \cdot 0,05^4} \left(\frac{0,05}{0,1} \right)^4 - 1 \right] = \\
&= 8,83 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,9 \text{ атм}.
\end{aligned}$$

2. Определить расход нефти ($\rho_{\text{н}} = 850 \text{ кг/м}^3$), протекающей по тру-

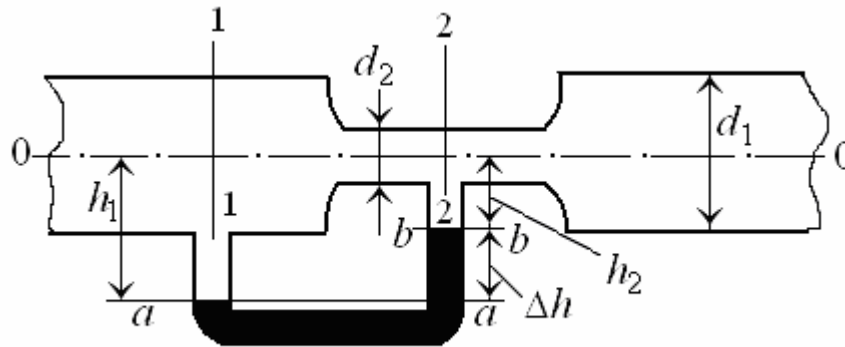


Рис. 3.2. К примеру № 2

бопроводу, имеющему сужение (рис. 3.2), если $d_1 = 15 \text{ см}$, $d_2 = 10 \text{ см}$ и разность уровней в ртутном дифференциальном пьезометре $\Delta h = 15 \text{ мм}$.

Потерями напора пренебречь.

Решение.

Запишем интеграл Бернулли (3.2) для сечений 1 – 1 и 2 – 2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_{\text{н}}} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_{\text{н}}},$$

где $z_1 = z_2$, а $v_1 = \frac{Q}{S_1}$; $v_2 = \frac{Q}{S_2}$ (см. пример 1).

Тогда имеем:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_{\text{н}}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gS_1^2} \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right).$$

Для нахождения разности давлений в сечениях 1 – 1 и 2 – 2 запишем уравнение равновесия в плоскости $a - a$ ртутного пьезометра

$$\gamma_H h_1 + p_1 = \gamma_H h_2 + \Delta h \gamma_{\text{рт}} + p_2.$$

Отсюда разность давлений $\frac{p_1 - p_2}{\gamma_H}$ будет равна:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_H} = (h_2 - h_1) + \frac{\gamma_{\text{рт}}}{\gamma_H} \Delta h = \Delta h \left(\frac{\gamma_{\text{рт}}}{\gamma_H} - 1 \right).$$

Окончательно для расхода нефти Q получаем:

$$Q = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h \left(\frac{\gamma_{\text{рт}}}{\gamma_H} - 1 \right)}{\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1}} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h \left(\frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho_H} - 1 \right)}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}} =$$

$$= 0,0177 \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,015 \left(\frac{13600}{850} - 1 \right)}{1,5^4 - 1}} = 0,0183 \text{ м}^3 / \text{с} = 18,3 \text{ л/с}.$$

3. Вода вытекает из открытого бака через малое отверстие в дне ($d = 10$ мм).

Определить высоту уровня воды в баке, если расход $Q = 0,48$ л/с. Силами вязкости пренебречь.

Р е ш е н и е.

Запишем формулу для расхода (3.6)

$$Q = S_0 \sqrt{2gH}.$$

Отсюда

$$H = \frac{Q^2}{S_0^2 \cdot 2g} = \frac{4^2 Q^2}{\pi^2 d^4 \cdot 2g} = \frac{4^2 \cdot 0,48^2}{3,14^2 \cdot 0,1^4 \cdot 2 \cdot 98,1} = 19,2 \text{ дм} = 1,92 \text{ м}.$$

4. При истечении жидкости под постоянным напором $H = 1,70$ м из круглого отверстия ($d_0 = 12$ мм) в атмосферу диаметр струи в сжатом сечении оказался равным $d_c = 9,6$ мм. Поставленный под струю мерный бак объемом $V = 10$ л наполнился за время $t = 25$ с. Определить коэффициенты φ , ε , μ^* и ξ .

Р е ш е н и е.

Из формулы для расхода (3.10) найдем μ^* :

$$\mu^* = \frac{Q}{S_0 \sqrt{2gH}} = \frac{V}{\pi d_0^2 \sqrt{2gH}} = \frac{10 \cdot 10^3}{25 \cdot 3,14 \cdot 1,2^2 \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 170}} = 0,615.$$

Зная $S_c = \frac{\pi d_c^2}{4}$ и $S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$, найдем ε по формуле (3.9):

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \frac{d_c^2}{d_0^2} = \frac{9,6^2}{12^2} = 0,64.$$

Из уравнений (3.8) и (3.11) определим φ и ξ :

$$\varphi = \frac{\mu^*}{\varepsilon} = \frac{0,615}{0,64} = 0,97$$

и
$$\xi = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,97^2} - 1 = 0,065.$$

З А Д А Ч И

3.1. На водопроводной трубе диаметром $d_1 = 10$ см установлен водомер в виде сужения диаметром $d_2 = 5$ см (рис. 3.3).

Нормальное сечение 1 – 1 и суженное сечение 2 – 2 снабжены пьезометрическими трубками. Отметки свободной поверхности в пьезометрах $z_1 = 0,8$ м и $z_2 = 0,5$ м.

Определить расход воды в трубе, пренебрегая потерями напора.

3.2. На какую высоту h может засасываться вода из резервуара по трубке, присоединенной к узкому сечению горизонтального трубопровода (рис. 3.4), если расход воды по нему $Q = 2,7$ л/с; диаметры $d_1 = 5$ см, $d_2 = 2,5$ см, а избыточное давление $p_1 = 0,08$ атм. Потери напора не учитывать.

3.3. В водопроводной трубе ($d = 150$ мм) установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром, показывающим разность уровней $\Delta h = 20$ мм (рис. 3.5). Считая $v_{\text{ср}} = \beta v_{\text{max}}$, где β – коэффициент

перехода, принятый $\beta = 0,84$, определить расход воды, протекающей по трубе. Потерями напора пренебречь.

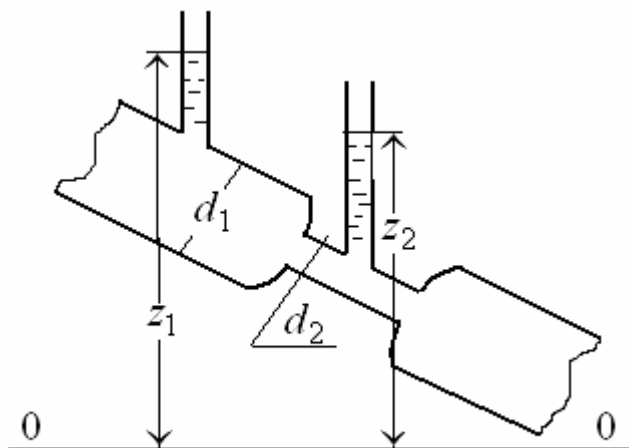


Рис. 3.3. К задаче № 3.1

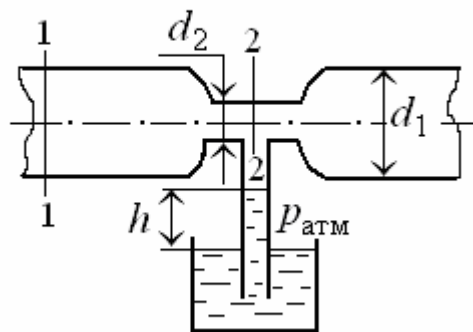


Рис. 3.4. К задаче № 3.2

3.4. Цилиндрические трубы A и B одинакового диаметра $d_1 = 0,1$ м соединяются с цилиндрической вставкой диаметром $d_2 = 0,05$ м с помощью двух конических участков (рис. 3.6). На участках A и C имеются пьезометрические трубки, позволяющие отсчитывать разность пьезометрических высот.

Определить расход воды в трубах, пренебрегая потерями напора, если $h = 1,0$ м.

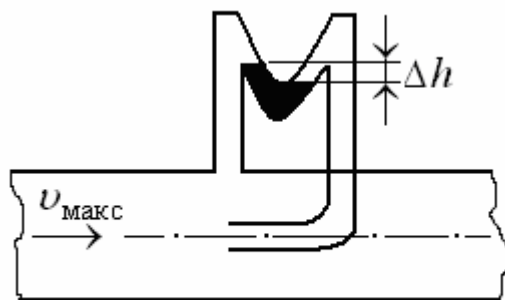


Рис. 3.5. К задаче № 3.3

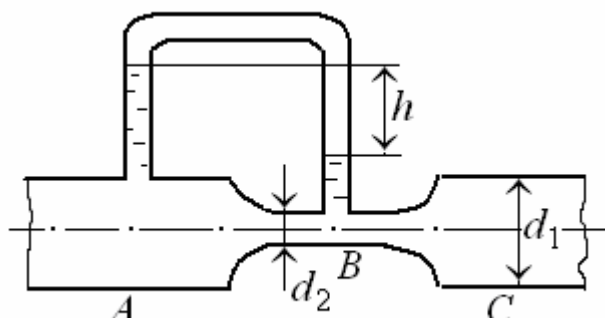


Рис. 3.6. К задаче № 3.4

3.5. Предполагая уровень воды в сосуде постоянным, определить расход воды Q и распределение пьезометрических высот в сечениях: $0-0$, $1-1$, $2-2$ и $3-3$, пренебрегая сопротивлениями (рис. 3.7), если $z_0 = 4$ м, $z_1 = 2$ м, $z_2 = 0,5$ м, $S_0 = 1$ м², $S_1 = 0,015$ м², $S_2 = 0,04$ м², $S_3 = 0,02$ м².

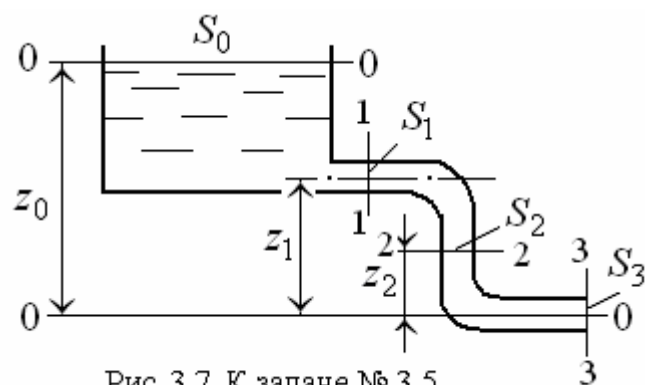


Рис. 3.7. К задаче № 3.5

3.6. Определить расход воды по трубопроводу переменного сечения (рис. 3.8) и скорость на каждом из участков, если $H = 5$ м, $d_1 = 15$ мм, $d_2 = 20$ мм и $d_3 = 10$ мм. Потери напора не учитывать.

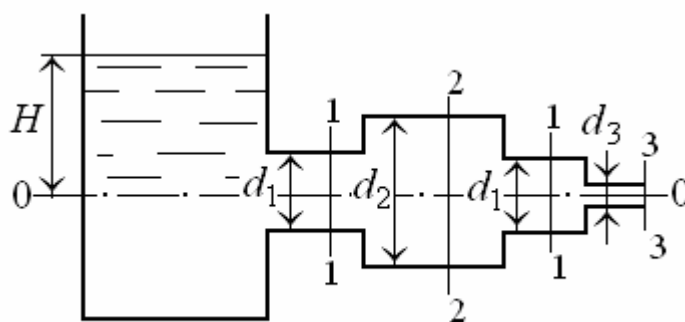


Рис. 3.8. К задаче № 3.6

3.7. Будет ли понижаться уровень топлива в цистерне, если производительность насоса, подающего топливо в цистерну, равна 2,0 т/ч, диаметр отверстия $d = 20$ мм, а начальный уровень в цистерне 1 м. Коэффициент расхода $\mu^* = 0,65$. Плотность топлива $\rho = 0,93$ т/м³.

3.8. Определить пропускную способность (расход Q) трубы диаметром $d = 2,26$ м, расположенной в теле водоудерживающей плотины, если напор над центром тяжести отверстия трубы $H = 8$ м (рис. 3.9). Принять $\mu^* = 0,61$, как в случае отверстия в тонкой стенке.

3.9. Определить расход воды, вытекающей из бака 1 в бак 2, через круглое отверстие диаметром $d = 0,1$ м, расположенное в дне бака 1 (рис. 3.10), если уровни воды в обоих баках постоянны, причем $h_1 = 2$ м, $h_2 = 1,5$ м, $\mu^* = 0,61$.

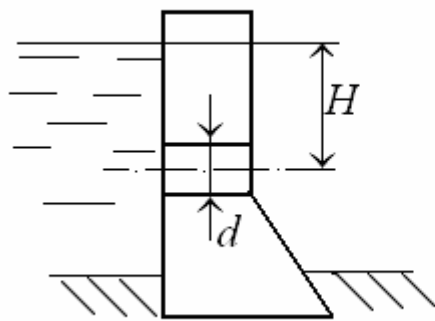


Рис. 3.9. К задаче № 3.8

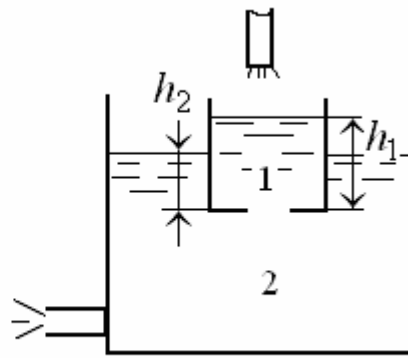


Рис. 3.10. К задаче № 3.9

3.10. Бак, употребляющийся для измерения расхода и сжатия струи, вытекающей в атмосферу через круглое отверстие в тонкой боковой стенке

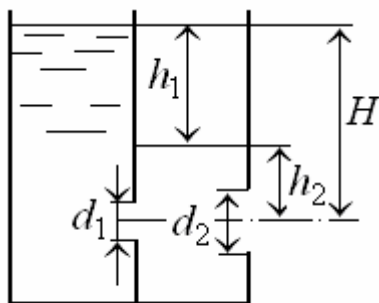


Рис. 3.11. К задаче № 3.10

диаметром $d_2 = 0,2$ м, снабжен для успокоения воды вертикальной перегородкой с круглым отверстием диаметром $d_1 = 0,1$ м (рис. 3.11). Определить расход Q и распределение напоров h_1, h_2 , если полный напор над центром тяжести наружного отверстия $H = 2$ м поддерживается постоянным, а $\mu^* = 0,61$.

3.11. Определить количество воды, вытекающей из бака через отверстие ($d = 10$ мм), в течение 3 мин при уровне воды в баке, равном 0,36 м. Уровень поддерживается постоянным. Давление на поверхность воды в баке в три раза превосходит атмосферное. Принять коэффициент расхода $\mu^* = 0,64$.

3.12. Истечение воды в атмосферу через отверстие ($d = 10$ мм) происходит под напором $H = 2$ м. Определить коэффициент сжатия струи, если расход $Q = 0,294$ л/с. Принять коэффициент сопротивления отверстия равным $\xi = 0,065$.

3.13. Вода выливается из открытого сосуда через малое отверстие в тонкой стенке диаметром $d = 15$ мм при постоянном напоре $H = 1$ м в атмосферу. Определить коэффициент сопротивления ξ отверстия, если расход $Q = 486$ см³/с, а диаметр струи в сжатом состоянии $d_c = 12$ мм.

3.14. Жидкость вытекает из открытого бака при постоянном напоре $H = 1,5$ м через малое отверстие диаметром $d = 12$ мм в дне. Определить коэффициенты расхода, скорости и сжатия струи, а также время заполнения бака емкостью 20 л, подставленного под струю, если время заполнения того же бака при $H = 1,0$ м и $d = 10$ мм составило 93 с. Принять коэффициент сопротивления $\xi = 0,065$.

3.15. В верхний сосуд поступает вода ($Q = 0,25$ л/с), которая затем перетекает через малое отверстие в дне диаметром $d_1 = 10$ мм в нижний сосуд, имеющий также малое отверстие в дне диаметром $d_2 = 15$ мм (рис. 3.12). Принять $\mu^* = 0,62$ в обоих случаях.

Определить: а) напоры H_1 и H_2 в обоих сосудах; б) при каком диаметре d_2 напор H_2 будет вдвое меньше, чем H_1 .

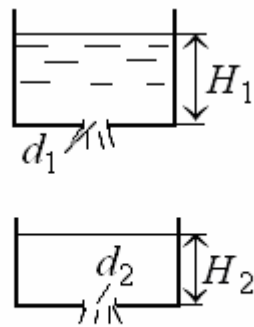


Рис. 3.12. К задаче № 3.15

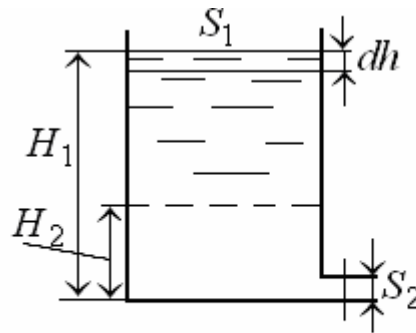


Рис. 3.13. К вопросу о времени истечения жидкости

Время истечения жидкости через малое отверстие

Рассмотрим вопрос о времени истечения идеальной жидкости из цилиндрической емкости (рис. 3.13) через малое отверстие в нижнем основании. Определим объем жидкости, который выливается из емкости за бесконечно малый промежуток времени:

$$dV = S_2 v_2 dt.$$

На эту же самую величину уменьшится объем жидкости в емкости, причем изменение объема можно связать с изменением уровня жидкости:

$$dV = S_1 dh.$$

Приравнявая правые части записанных уравнений, получаем:

$$S_2 v_2 dt = -S_1 dh.$$

Знак минус в правой части согласовывает разноименное изменение двух переменных: по мере увеличения времени уровень жидкости в емкости уменьшается. Из полученного соотношения вытекает следующее дифференциальное уравнение истечения:

$$dt = -\frac{S_1}{S_2 v_2} dh.$$

Поскольку: $v_2 = \sqrt{2gh}$,

то
$$dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать $S_1 = f(h)$.

Рассмотрим применение уравнения истечения к сосудам постоянного сечения ($S_1 = \text{const}$). Найдем время Δt , за которое уровень жидкости в цилиндрическом сосуде уменьшится от H_1 до H_2 . Для этого проинтегрируем уравнение истечения в пределах:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Получим:
$$\Delta t = t_2 - t_1 = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} 2\sqrt{h} \Big|_{H_1}^{H_2},$$

или
$$\Delta t = \frac{2S_1}{S_2 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}).$$

Полное время истечения (при этом $H_2 = 0$) равно:

$$t = \frac{2S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \sqrt{H_1}.$$

Если сечение емкости меняется по высоте, то перед интегрированием необходимо найти математическую связь между S_1 и h .

П Р И М Е Р

5. Найти время опорожнения цилиндрической цистерны диаметром $d_1 = 2$ м и длиной $L = 20$ м (рис. 3.14) через малое отверстие в нижнем основании диаметром $d_2 = 10$ см. Внутреннее пространство цистерны сообщается с атмосферой.

Р е ш е н и е.

Поскольку сечение, совпадающее со свободной поверхностью S_1 , изменяется с высотой, то прежде всего нужно найти $S_1 = f(h)$.

Обозначим переменную сторону этого сечения через x , тогда из рассмотрения прямоугольного треугольника OAB следует, что

$$x = 2\sqrt{r^2 - (h-r)^2} = 2\sqrt{h(2r-h)}.$$

Таким образом,

$$S_1 = Lx = 2L\sqrt{h(2r-h)}.$$

Дифференциальное уравнение истечения для нашего случая принимает вид:

$$\int_0^t dt = -\frac{2L}{S_2\sqrt{2g}} \int_{2r}^0 \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{\sqrt{h}} dh.$$

Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_{2r}^0 \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{\sqrt{h}} dh = \int_{2r}^0 \sqrt{2r-h} dh.$$

Произведем замену переменной:

$$I = -\int_{2r}^0 \sqrt{2r-h} d(2r-h).$$

Тогда
$$I = -\frac{2}{3}(2r-h)^{3/2} \Big|_{2r}^0 = -\frac{2}{3}(2r)^{3/2} = -\frac{2}{3}d_1^{3/2}.$$

Следовательно,

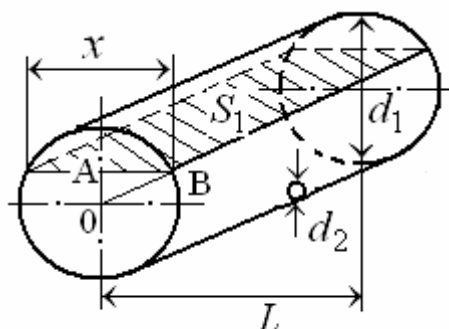


Рис. 3.14. К примеру № 5

$$t = \frac{2L}{\pi d_2^2 / 4 (\sqrt{2g})^3} \frac{2}{d_1^3} d_1^{3/2} = \frac{16Ld_1^{3/2}}{3\pi d_2^2 \sqrt{2g}}.$$

Подставляя численные значения, будем иметь:

$$t = \frac{16 \cdot 20 \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 0,01 \cdot \pi \sqrt{20}} = 2130 \text{ с} \cong 0,6 \text{ ч.}$$

ЗАДАЧИ

3.16. Цилиндрический резервуар радиусом основания $R_{01} = 5$ м заполнен водой до высоты $H = 25$ м. Определить время t , необходимое для отбора 628 м^3 воды через отверстие в нижнем основании радиусом $R_{02} = 5$ см. Пространство резервуара сообщается с атмосферой.

3.17. Определить время t , за которое вода выльется из шаровой емкости радиусом $R_{01} = 10$ м через отверстие сечением $S_2 = 31,4 \text{ см}^2$ в нижнем основании. В начальный момент емкость заполнена полностью, а ее внутреннее пространство сообщается с атмосферой.

3.18. Определить время t , за которое вода выльется из полностью заполненной конической емкости (радиус основания $R_{01} = 10$ м, высота $H = 20$ м) через отверстие радиусом $R_{02} = 10$ см в нижнем основании. Внутреннее пространство емкости сообщается с атмосферой.

3.19. Сравнить время опорожнения призматической емкости через малое отверстие, если один раз она стоит на торце, а другой раз лежит на боковой грани. Сечение призмы – равносторонний треугольник.

4. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Существуют два режима движения вязкой жидкости: ламинарный и турбулентный.

При ламинарном движении отдельные слои жидкости скользят друг по другу не перемешиваясь, а в случае турбулентного движения имеет место перемешивание слоев жидкости, обусловленное хаотическим

перемещением конечных масс жидкости в разных направлениях. Смена характера движения происходит, когда число Рейнольдса $Re = v_{\text{ср}}d/\nu$ достигает критического значения $Re_{\text{кр}}$. Для цилиндрических труб $Re_{\text{кр}} \cong \cong 2300$. При ламинарном режиме движения по цилиндрической трубе распределение скорости по сечению трубы носит параболический характер

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R_0^2 - R^2).$$

Здесь Δp – падение давления (потеря напора) на участке трубы длиной l , R_0 – радиус трубы.

Перепад давления характеризует гидравлическое сопротивление трубы и связан со скоростным напором следующим соотношением:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (4.1)$$

справедливым как для ламинарного, так и для турбулентного движения.

Безразмерный множитель λ носит название коэффициента гидравлического сопротивления. Для ламинарного движения он равен

$$\lambda = \frac{64}{Re_{\text{ср}}} = 64 \frac{\nu}{v_{\text{ср}} d}.$$

Объемный расход жидкости через сечение трубы при ламинарном движении определяется уравнением:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R_0^4.$$

Средняя скорость по сечению равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{S} = \frac{\Delta p R_0^2}{8\mu l}.$$

В случае турбулентного движения распределение скорости по сечению трубы носит логарифмический характер:

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{v_* \cdot y}{\nu} + 5,5. \quad (4.2)$$

Величину $u_* = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$ (где τ_ω – напряжение трения на стенке трубы) назы-

вают динамической скоростью.

Выражению (4.2) соответствует логарифмический закон сопротивления при турбулентном движении (формула Никурадзе):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\text{Re}_{\text{ср}} \sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (4.3)$$

Зависимости (4.2) и (4.3) справедливы при любых значениях числа Re .

Иногда для расчета поля скоростей и коэффициента сопротивления при турбулентном движении удобнее пользоваться степенными зависимостями:

$$\frac{v}{u_*} = 8,57 \left(\frac{u_* y}{v} \right)^{1/7}$$

и
$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}_{\text{ср}}^{0,25}}, \quad (4.4)$$

пригодными при $\text{Re}_{\text{ср}} \leq 1 \cdot 10^5$.

Формулы (4.3) и (4.4) справедливы лишь для гидравлически гладких труб, т. е. для случаев, когда шероховатость трубы не сказывается на коэффициенте сопротивления λ . В случае гидравлически шероховатых труб для расчета λ можно воспользоваться формулой Никурадзе:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{d}{\Delta} + 1,74 \right)^2}, \quad (4.5)$$

справедливой при $\text{Re} > 560 \cdot (d/\Delta)$. Здесь Δ – абсолютная шероховатость трубы, под которой понимается средняя высота бугорков шероховатости. Для расчета λ в этом случае можно также воспользоваться формулой Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}, \quad (4.6)$$

справедливой для тех же условий, что и формула (4.5).

П Р И М Е Р Ы

1. Определить режим движения воды при 4°C по трубопроводу, диаметром $d = 5$ см, если скорость $v_{\text{ср}} = 1$ м/с. Кинематический коэффициент вязкости воды при указанной температуре $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Р е ш е н и е.

Определяем число Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,05}{1,57 \cdot 10^{-6}} = 3180.$$

Так как $\text{Re}_{\text{ср}} > \text{Re}_{\text{кр}} (\cong 2300)$, то режим движения является турбулентным.

2. Определить потерю напора при движении топливной смеси, имеющей коэффициент вязкости $\mu = 0,059$ Н·с/м² и плотность $\rho = 920$ кг/м³ по трубопроводу длиной $l = 15$ м и диаметром $d = 100$ мм, если расход топлива $Q = 25$ т/ч.

Р е ш е н и е.

Определяем число Рейнольдса

$$\text{Re}_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} = \frac{Q}{\rho S} \frac{d \cdot \rho}{\mu} = \frac{Q \cdot d}{\mu S} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 4}{0,059 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot 3600} = 1472.$$

Так как $\text{Re}_{\text{ср}} < \text{Re}_{\text{кр}} (\cong 2300)$, то режим движения ламинарный. Для ламинарного режима имеем:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ср}}} = \frac{64}{1472} = 0,0434.$$

Потерю напора находим по формуле (4.1)

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{cp}}^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{Q^2}{2\rho^2 S^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2\rho S^2} =$$

$$= 0,0434 \cdot \frac{15}{0,1 \cdot 0,92 \cdot 10^3} \cdot \left(\frac{25 \cdot 10^3}{3600} \right)^2 \cdot \frac{16}{2 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{-4}} = 268 \text{ Н/м}^2.$$

ЗАДАЧИ

4.1. Каков режим движения мазута в трубопроводе диаметром 10 см, если коэффициент вязкости мазута $\mu = 587 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$, а расход составляет $Q = 2 \text{ л/с}$. Плотность мазута $\rho = 950 \text{ кг/м}^3$.

4.2. Каков может быть максимальный расход в трубопроводе, диаметром $d = 80 \text{ мм}$, чтобы при протекании в нем воды ($\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) наблюдался устойчивый ламинарный режим движения?

4.3. Определить скорости, при которых сохраняется устойчивый ламинарный режим при протекании мазута ($\nu_{\text{м}} = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$) и воды ($\nu_{\text{в}} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$) по трубопроводу диаметром $d = 100 \text{ мм}$?

4.4. Каков режим движения мазута по трубе диаметром $d = 110 \text{ мм}$, если производительность насоса, с помощью которого его откачивают, составляет $Q = 5 \text{ т/ч}$. Вязкость мазута $\mu = 0,064 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$.

4.5. Определить, при какой скорости движения воды в трубе диаметром $d = 100 \text{ мм}$ будет иметь место ламинарный режим движения ($\nu = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$)?

4.6. Прибор для подачи небольших количеств агрессивной жидкости состоит из цилиндра, в котором находится поплавок, снабженный сифонной трубкой (рис. 4.1).

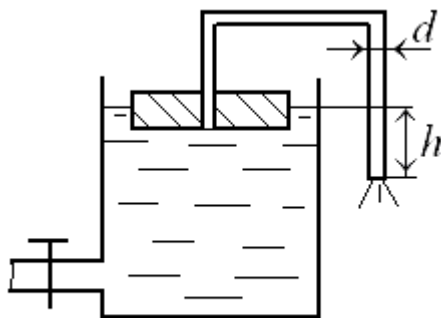


Рис. 4.1. К задаче № 4.6

Определить расход жидкости ($\nu = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$), если диаметр трубки $d = 5 \text{ мм}$, а длина ее $l = 600 \text{ мм}$.

Выходное сечение трубы расположено ниже свободной поверхности $h = 250$ мм. Режим движения ламинарный. Учитывать только потери на трение по длине трубки.

4.7. По трубопроводу длиной $l = 500$ м и диаметром $d = 100$ мм протекает жидкость со средней скоростью $v_{\text{ср}} = 0,4$ м/с. Кинематическая вязкость жидкости $\nu = 0,4 \cdot 10^{-4}$ м²/с, а плотность $\rho = 1000$ кг/м³.

Определить режим движения, коэффициент сопротивления λ и сопротивление Δp .

4.8. По горизонтальному трубопроводу (диаметром $d = 200$ мм и $l = 24\,000$ м) перекачивается жидкость, имеющая плотность $\rho = 850$ кг/м³ и вязкость $\nu = 1,3 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

Определить массовый расход Q , если перепад давления в трубопроводе составляет $\Delta p = 9,5 \cdot 10^5$ Н/м².

Указание. При расчете коэффициента сопротивления воспользоваться формулой (4.4).

4.9. При движении жидкости по стальной трубе диаметром $d = 300$ мм было найдено, что при скоростях выше 2,6 м/с коэффициент сопротивления λ остается постоянным и равным 0,016. Вязкость жидкости $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Пользуясь этими данными, определить среднюю шероховатость трубы Δ .

Указание. Для расчета воспользоваться формулой (4.6).

4.10. Трубопровод был рассчитан на перекачку жидкости с плотностью $\rho = 900$ кг/м³ и кинематической вязкостью $\nu = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м²/с. После его сооружения выяснилось, что жидкость имеет плотность $\rho = 880$ кг/м³ и вязкость $\mu = 1$ Н·с/м². Определить, полагая течение ламинарным и перепад давления постоянным, во сколько раз при этом придется изменить объемный расход?

5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Неограниченная пластина

При стационарном режиме температурное поле в неограниченной пластине описывается уравнением:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\delta} x + T_1$$

и, следовательно, носит линейный характер (рис. 5.1).

Плотность теплового потока, проходящего через пластину, определяется по формуле:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\delta/\lambda},$$

где $T_1 - T_2 = \Delta T$ – температурный напор, а δ/λ – тепловое сопротивление

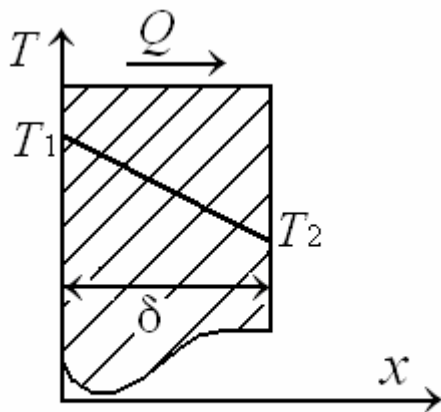


Рис. 5.1. Теплопроводность в плоской стенке

ление пластины толщиной δ и единичной площадью $S = 1,0 \text{ м}^2$.

Размерность δ/λ :

$$\left[\frac{\delta}{\lambda} \right] = \frac{[T_1 - T_2]}{[q]} = \text{К} / (\text{Вт}/\text{м}^2),$$

т. е. тепловое сопротивление δ/λ определяет перепад температуры, при котором плотность теплового потока, проходящего через

пластину, равна $1,0 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Плотность теплового потока q , проходящего через многослойную пластину, состоящую из n слоев, определяется уравнением:

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (5.1)$$

а температурный напор в i -м слое стенки – уравнением:

$$T_i - T_{i+1} = q \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (5.2)$$

В случае процессов теплопередачи, когда имеет место перенос тепла из одной среды в другую через разделяющую их стенку (рис. 5.2), должны быть предварительно найдены коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 .

Плотность теплового потока q , проходящего через многослойную пластину, состоящую из n слоев, в случае теплопередачи определяется уравнением

$$q = \frac{T_{\text{ср},1} - T_{\text{ср},2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (5.3)$$

где $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$ – внешние тепловые сопротивления единицы поверхности стенки.

Если обозначить

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad \text{то уравнение (19) примет вид:}$$

$$q = K (T_{\text{ср},1} - T_{\text{ср},2}),$$

где K – коэффициент теплопередачи [Вт/(м²·К)].

Температурный напор между средой и контактирующей с ней поверхностью стенки определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} T_{\text{ср},1} - T_{\text{п}1} &= \frac{1}{\alpha_1} q, \\ T_{\text{п}2} - T_{\text{ср},2} &= \frac{1}{\alpha_2} q. \end{aligned} \quad (5.4)$$

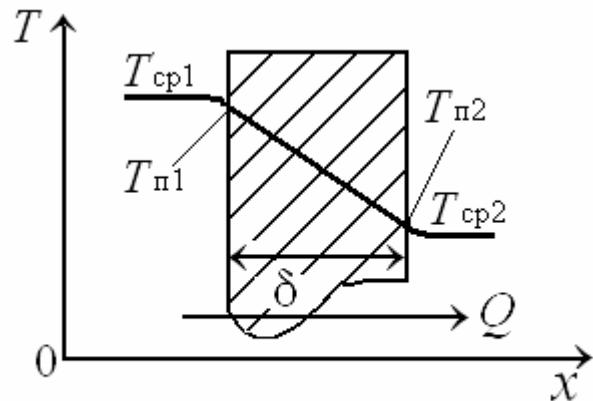


Рис. 5.2. Теплопередача через плоскую стенку

Неограниченная цилиндрическая труба

В случае неограниченной цилиндрической трубы (рис. 5.3), когда тепловой поток имеет лишь радиальное направление, выражение для распределения температуры в трубе имеет вид:

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_{01} / R_{02})} \ln \frac{R}{R_{01}}.$$

В этом случае плотность теплового потока q изменяется по толщине трубы и зависит от цилиндрической поверхности, для которой она определяется. Ее значение будет наибольшим для внутренней поверхности и наименьшим для внешней.

Поэтому удобнее говорить о полном потоке тепла Q^* за единицу времени, так как он имеет одно и то же значение для внутренней и внешней поверхности трубы:

$$Q^* = q_1 S_1 = q_2 S_2.$$

Этот поток тепла описывается уравнением:

$$Q^* = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln(R_{02} / R_{01})}.$$

Удобной характеристикой интенсивности теплового потока для трубы, не зависящей от радиуса цилиндрической поверхности, является линейная (погонная)

плотность теплового потока $q_{\text{л}}$:

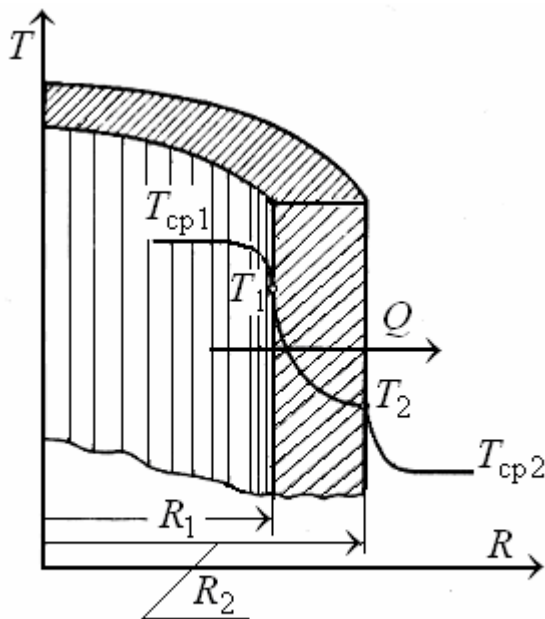


Рис. 5.3. Температурное поле в цилиндрической стенке

$$q_{\text{л}} = \frac{Q^*}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02} / R_{01})},$$

где $\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02} / R_{01})$ – линейное тепловое сопротивление трубы.

Для многослойной трубы получим:

$$q_{\text{л}} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln(R_{0,i+1} / R_{0,i})}. \quad (5.5)$$

Для процесса теплопередачи плотность теплового потока $q_{\text{л}}$, проходящего через многослойную трубу, определяется уравнением:

$$q_{\text{л}} = \frac{T_{\text{ср1}} - T_{\text{ср2}}}{\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{R_{0,i+1}}{R_{0,i}} + \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}}, \quad (5.6)$$

где $\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1}$ и $\frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}$ – внешние тепловые сопротивления.

Если ввести обозначение

$$K_{\text{л}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{R_{0,i+1}}{R_{0,i}} + \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}},$$

то уравнение (5.6) примет вид:

$$q_{\text{л}} = K_{\text{л}} (T_{\text{ср,1}} - T_{\text{ср,2}}),$$

где $K_{\text{л}}$ – линейный коэффициент теплопередачи [Вт/(м·К)].

Температурный напор между средой и контактирующей поверхностью определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ср1}} - T_{\text{п1}} &= \frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} q_{\text{л}}; \\ T_{\text{п2}} - T_{\text{ср2}} &= \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2} q_{\text{л}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

ПРИМЕРЫ

1. Обмуровка топки парового котла состоит из двух слоев. Внутренний слой выполнен из шамотного кирпича: $\delta_1 = 400$ мм, $\lambda_1 = 1,4$ Вт/(м·К), а наружный – из красного кирпича: $\delta_2 = 200$ мм, $\lambda_2 = 0,58$ Вт/(м·К). Темпе-

ратуры внутренней и наружной поверхности обмуровки соответственно $T_1 = 900 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_3 = 90 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить потери тепла q через обмуровку и наибольшую температуру T_2 красного кирпича.

Р е ш е н и е.

Для определения потерь тепла q воспользуемся уравнением (5.1) для $n = 2,0$:

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{900 - 90}{\frac{400 \cdot 10^{-3}}{1,2} + \frac{200 \cdot 10^{-3}}{0,5}} = 1292 \text{ Вт/м}^2.$$

Для определения температуры на границе наружного и внутреннего слоя обмуровки (T_2) воспользуемся уравнением (5.2) для $i = 2,0$:

$$T_1 - T_2 = \frac{\delta_1}{\lambda_1} q.$$

Отсюда
$$T_2 = T_1 - \frac{\delta_1}{\lambda_1} q = 900 - \frac{400 \cdot 10^{-3}}{1,2} \cdot 1292 = 530 \text{ }^\circ\text{C}.$$

2. Определить потерю тепла Q [Вт] через стенку из красного кирпича [$\lambda = 0,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$] длиной $l = 5 \text{ м}$, высотой $h = 4 \text{ м}$ и толщиной $\delta = 510 \text{ мм}$, если температура воздуха внутри помещения $T_{\text{ср1}} = 18 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициент теплоотдачи к внутренней поверхности стенки $\alpha_1 = 7,5 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$, температура наружного воздуха $T_{\text{ср2}} = -30 \text{ }^\circ\text{C}$, коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенки $\alpha_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Вычислить также температуры на поверхностях стены $T_{\text{п1}}$ и $T_{\text{п2}}$.

Р е ш е н и е.

Пользуясь уравнением (5.3) для $n = 1$, находим плотность теплового потока:

$$q = \frac{T_{\text{ср1}} - T_{\text{ср2}}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{18 - (-30)}{\frac{1}{7,5} + \frac{510 \cdot 10^{-3}}{0,8} + \frac{1}{20}} = 58,5 \text{ Вт/м}^2.$$

Следовательно, потери тепла через стенку будут равны:

$$Q = q \cdot S = 58,5 \cdot 5 \cdot 4 = 1170 \text{ Вт.}$$

Для определения температур поверхностей стенки воспользуемся уравнениями (5.4). Из них следует, что

$$T_{\text{п1}} = T_{\text{ср1}} - \frac{1}{\alpha_1} q = 18 - \frac{1}{7,5} \cdot 58,5 = 10,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

и

$$T_{\text{п2}} = T_{\text{ср2}} - \frac{1}{\alpha_2} q = -30 - \frac{1}{20} \cdot 58,5 = -27,1 \text{ }^\circ\text{C.}$$

3. Определить расход тепла $q_{\text{л}}$ через стенку трубы ($d_1/d_2 = 20/30$ мм) из жаропрочной стали, коэффициент теплопроводности которой $\lambda = 17,4$ Вт/(м·К), а температуры внешней и внутренней поверхностей $T_1 = 600$ °С, $T_2 = 450$ °С.

Р е ш е н и е.

Для определения расхода тепла через стенку трубы воспользуемся уравнением (5.5) для $n = 1$:

$$q_{\text{л}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02} / R_{01})} = \frac{600 - 450}{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 17,4} \ln \frac{15 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-2}}} = 40750 \text{ Вт/м.}$$

4. Вычислить потерю тепла с 1 м неизолированного трубопровода диаметром $d_1/d_2 = 300/330$ мм, проложенного на открытом воздухе, если внутри трубы протекает вода со средней температурой $T_{\text{ср1}} = 90$ °С. Температура окружающего воздуха $T_{\text{ср2}} = -15$ °С. Коэффициент теплопроводности материала трубы $\lambda = 50$ Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи от воды к стенке трубы $\alpha_1 = 1000$ Вт/(м²·К) и от трубы к окружающему воздуху $\alpha_2 = 12$ Вт/м²·К. Определить также температуры на внутренней и внешней поверхностях трубы.

Р е ш е н и е.

Потери тепла с 1,0 м трубопровода находим воспользовавшись уравнением (5.6) для $n = 1$:

$$q_{\text{л}} = \frac{T_{\text{ср1}} - T_{\text{ср2}}}{\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_{02}}{R_{01}} + \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}} =$$

$$= \frac{90 - (-15)}{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \ln \frac{16,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 16,5 \cdot 10^{-2} \cdot 12}}$$

$$= 652 \text{ Вт/м.}$$

Для нахождения температуры поверхностей трубы $T_{\text{п1}}$ и $T_{\text{п2}}$ воспользуемся уравнениями (5.7) и (5.5) соответственно. Из уравнения (5.7) следует, что

$$T_{\text{п1}} = T_{\text{ср1}} - \frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} q_{\text{л}} = 90 - \frac{1}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} \cdot 652 = 89,8 \text{ }^\circ\text{C},$$

а из (5.5) находим:

$$T_{\text{п2}} = T_{\text{п1}} - \frac{1}{2\pi\lambda} q_{\text{л}} \ln(R_{02} / R_{01}) = 89,8 -$$

$$- \frac{1}{2 \pi \cdot 50} \ln \frac{16,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-2}} \cdot 652 = 89,6 \text{ }^\circ\text{C}.$$

ЗАДАЧИ

5.1. Определить коэффициент теплопроводности кирпичной стенки толщиной $\delta = 390$ мм, если температура на внутренней поверхности стенки $T_1 = 300$ °С и на наружной $T_2 = 60$ °С. Потери тепла через стенку $q = 178$ Вт/м².

5.2. Через плоскую металлическую стенку топки котла толщиной $\delta = 14$ мм от газов к кипящей воде проходит удельный тепловой поток $q = 25000$ Вт/м². Коэффициент теплопроводности стали $\lambda = 50$ Вт/(м·К). Определить перепад температур на поверхностях стенки.

5.3. Определить удельный тепловой поток через бетонную стенку толщиной $\delta = 300$ мм, если температуры на внутренней и наружных

поверхностях стенки соответственно равны $T_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_2 = -15 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент теплопроводности бетона $\lambda = 1,0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

5.4. Определить потерю тепла q через свод пламенной печи, выложенной из шамотного кирпича [$\delta = 250 \text{ мм}$, $\lambda = 1,28 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$]. Температура свода печи на горячей стороне $T_1 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, а на холодной $T_2 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$.

5.5. Определить расход тепла Q [Вт] через кирпичную стенку толщиной $\delta = 250 \text{ мм}$ на площади $3 \times 5 \text{ м}^2$, если температуры поверхностей стенки $T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$, а коэффициент теплопроводности кирпича $\lambda = 1,16 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

5.6. Вычислить плотность теплового потока q через плоскую однородную стенку, толщина которой значительно меньше ширины и высоты, если стенка выполнена: а) из стали $\lambda_{\text{ст}} = 40 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; из бетона $\lambda_{\text{б}} = 1,1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; в) из диатомитового кирпича $\lambda_{\text{к}} = 0,11 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Во всех случаях толщина стенки $\delta = 50 \text{ мм}$. Температуры на поверхностях стенки поддерживаются постоянными и равными $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_2 = 90 \text{ }^\circ\text{C}$.

5.7. Стенка нагревательной печи имеет два слоя кирпича. Внутренний слой выполнен из огнеупорного кирпича толщиной $\delta_1 = 350 \text{ мм}$, а наружный из красного кирпича толщиной $\delta_2 = 250 \text{ мм}$. Определить температуру на внутренней поверхности стенки T_1 и на внутренней стороне красного кирпича T_2 , если на наружной стороне температура стенки $T_3 = 90 \text{ }^\circ\text{C}$, а потеря тепла через 1 м^2 поверхности стенки равна 1 кВт . Коэффициенты теплопроводности огнеупорного и красного кирпича соответственно равны: $\lambda_{\text{ок}} = 1,4 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ и $\lambda_{\text{кк}} = 0,58 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

5.8. Обмуровка печи состоит из слоев шамотного и красного кирпича и диатомитовой засыпки между ними. Диатомитовая засыпка имеет толщину $\delta_2 = 50 \text{ мм}$ и $\lambda_2 = 0,14 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, а красный кирпич имеет $\delta_3 = 250 \text{ мм}$ и $\lambda_3 = 0,7 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

Во сколько раз необходимо увеличить толщину красного кирпича для того, чтобы обмуровка печи без диатомитовой засыпки имела такое же

внутреннее термическое сопротивление, как и с засыпкой.

5.9. Определить поток тепла q через поверхность стальной стенки котла [$\delta_1 = 20$ мм, $\lambda_1 = 58$ Вт/(м·К)], покрытую слоем накипи [$\delta_2 = 2$ мм, $\lambda_2 = 1,16$ Вт/(м·К)]. Наибольшая температура поверхности стенки равна 250 °С, а наименьшая температура накипи 100 °С. Определить также наибольшую температуру накипи.

5.10. Вычислить тепловой поток через 1 м² чистой поверхности нагрева парового котла и температуры на поверхностях стенки, если заданы следующие величины: температура дымовых газов $T_{cp1} = 1000$ °С, температура кипящей воды $T_{cp2} = 200$ °С, коэффициенты теплоотдачи от газов к стенке $\alpha_1 = 100$ Вт/(м²·К) и от стенки к кипящей воде $\alpha_2 = 5000$ Вт/(м²·К). Коэффициент теплопроводности материала стенки $\lambda = 50$ Вт/(м·К) и толщина стенки $\delta = 12$ мм.

5.11. Решить задачу 10 при условии, что в процессе эксплуатации поверхность нагрева парового котла со стороны дымовых газов покрылась слоем сажи толщиной $\delta_c = 1$ мм [$\lambda_c = 0,08$ Вт/(м·К)], а со стороны воды – слоем накипи толщиной $\delta_n = 2$ мм [$\lambda_n = 0,8$ Вт/(м·К)]. Вычислить тепловой поток через 1 м² загрязненной поверхности нагрева и температуры на поверхностях соответствующих слоев $T_{п1}$, $T_{п2}$, $T_{п3}$ и $T_{п4}$. Сравнить результаты расчета с ответом задачи 10 и определить уменьшение тепловой нагрузки Δq (в %).

5.12. Определить плотность теплового потока q [Вт/м²] через кирпичную стенку толщиной 510 мм с коэффициентом теплопроводности $\lambda_k = 0,8$ Вт/(м·К), покрытую снаружи слоем теплоизоляции толщиной 50 мм с коэффициентом теплопроводности $\lambda_{из} = 0,08$ Вт/(м·К). Температура воздуха внутри помещения $T_{cp1} = 18$ °С, коэффициент теплоотдачи к внутренней поверхности стенки $\alpha_1 = 7,5$ Вт/(м²·К), температура наружного воздуха, $T_{cp2} = -30$ °С, коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности $\alpha_2 = 20$ Вт/(м²·К). Вычислить также температуры на поверхностях стены $T_{п1}$, $T_{п2}$ и на поверхности слоя $T_{п3}$.

5.13. Змеевики пароподогревателя выполнены из труб жароупорной стали диаметром $d_1/d_2 = 32/42$ мм с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 14$ Вт/(м·К). Температура внешней поверхности трубы $T_2 = 580$ °С и внутренней поверхности $T_1 = 450$ °С. Вычислить удельный тепловой поток через стенку на единицу длины трубы $q_{\text{л}}$ [Вт/м].

5.14. Железобетонная дымовая труба [$d_2/d_3 = 800/1300$ мм, $\lambda_2 = 1,10$ Вт/(м·К)] покрыта с внутренней стороны слоем огнеупорной футеровки $\lambda_1 = 0,5$ Вт/(м·К).

Определить толщину футеровки δ_1 и температуру наружной поверхности трубы T_3 при условии, чтобы потери тепла не превышали $q_{\text{л}} = 2000$ Вт/м, а наибольшие температуры футеровки и бетона не превышали $T_1 = 421$ °С и $T_2 = 200$ °С.

5.15. Стальной паропровод [$d_1 = 100$ мм, $d_2 = 110$ мм, $\lambda_1 = 58$ Вт/(м·К), $T_1 = 250$ °С] покрыт двумя слоями тепловой изоляции одинаковой толщины [$\delta = 50$ мм, $\lambda_2 = 0,07$ Вт/(м·К), $\lambda_3 = 0,14$ Вт/(м·К)].

Определить потери тепла $q_{\text{л}}$ [Вт/м] и температуру T_3 на границе соприкосновения этих слоев. Повторить эти расчеты при условии, что изоляция первого слоя установлена на место второго. Температура T_4 на внешней поверхности в обоих случаях одинакова и равна 50 °С.

5.16. Определить температуру на границах слоев трехслойной изоляции трубы. Внутренний диаметр трубы $d = 245$ мм. Толщина слоев и коэффициенты теплопроводности изоляционных материалов соответственно равны: $\delta_1 = 100$ мм, $\delta_2 = 20$ мм, $\delta_3 = 30$ мм, $\lambda_1 = 0,03$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 0,06$ Вт/(м·К) и $\lambda_3 = 0,12$ Вт/(м·К). Температура внутренней поверхности трубопровода 250 °С, а наружной поверхности изоляции 65 °С.

5.17. Определить тепловой поток через поверхность 1 м паропровода внутренним диаметром 140 мм, изолированного двумя слоями тепловой изоляции толщиной $\delta_2 = 20$ мм и $\delta_3 = 40$ мм. Коэффициенты теплопроводности трубы и изоляции соответственно равны $\lambda_1 = 55$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 0,037$ Вт/(м·К) и $\lambda_3 = 0,14$ Вт/(м·К). Температура на внутренней

поверхности трубопровода $T_1 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$, а на наружной поверхности изоляции $T_4 = 55 \text{ }^\circ\text{C}$. Толщина стенки паропровода $\delta_1 = 5 \text{ мм}$. Как изменится потеря тепла через изолированную стенку, если изоляционные слои поменять местами.

5.18. Трубопровод диаметром $d_1/d_2 = 44/51 \text{ мм}$, по которому течет масло, покрыт слоем бетона толщиной $\delta_2 = 80 \text{ мм}$. Коэффициент теплопроводности материала трубопровода $\lambda_1 = 50 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, коэффициент теплопроводности бетона $\lambda_2 = 1,28 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Средняя температура масла на рассматриваемом участке трубопровода $T_{\text{ср1}} = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, температура окружающего воздуха $T_{\text{ср2}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплоотдачи от масла к стенке $\alpha_1 = 100 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ и от поверхности бетона к воздуху $\alpha_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$.

Определить потери тепла с 1 м трубопровода, покрытого бетоном.

5.19. Плоский алюминиевый лист толщиной 0,8 мм пластинчатого теплообменника омывается с одной стороны газом, с другой – воздухом, средние температуры которых $T_{\text{ср1}} = 280 \text{ }^\circ\text{C}$ и $T_{\text{ср2}} = 210 \text{ }^\circ\text{C}$, а коэффициенты теплоотдачи соответственно $\alpha_1 = 81,5 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ и $\alpha_2 = 232,6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Коэффициент теплопроводности стенки $\lambda = 203,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$. Определить удельный тепловой поток, переданный через стенку.

5.20. Оценить тепловые потери с 1,0 м трубопровода диаметром $d_1/d_2 = 150/165 \text{ мм}$, покрытого слоем изоляции толщиной $\delta_1 = 60 \text{ мм}$, если трубопровод проложен на воздухе с $T_{\text{ср2}} = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ и по нему течет вода со средней температурой $T_{\text{ср1}} = 90 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплопроводности материала трубы и изоляции соответственно равны $\lambda_1 = 50 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $\lambda_2 = 0,15 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, а коэффициенты теплоотдачи от поверхности изоляции к окружающему воздуху $\alpha_2 = 8 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$, а от воды к стенке трубы $\alpha_1 = 1000 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Вычислить также температуру на внешней поверхности трубы и внешней поверхности изоляции.

6. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Два физических явления подобны друг другу, если они протекают в геометрически подобных системах и если отношения одноименных физических величин в сходственные моменты времени одинаковы во всех сходственных точках этих систем. Необходимое условие подобия физических явлений, протекающих в натуральном объекте и в его модели, заключается в одинаковости инвариантов, составленных из величин, входящих в условия однозначности явления. Эти величины именуется критериями подобия.

Гидродинамическое подобие

Общее уравнение подобия, вытекающее из анализа уравнения движения реальной жидкости, имеет вид:

$$Eu = (Sh, Re, Fr), \quad (6.1)$$

где $Eu = \Delta p / \rho v^2$ – критерий (число) Эйлера; $Sh = vt/l$ – критерий (число) Струхала; $Re = vl/\nu$ – критерий (число) Рейнольдса; $Fr = v^2/gl$ – критерий (число) Фруда.

Здесь ρ и ν – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно, а l – характеристический линейный размер задачи.

Критерий Эйлера представляет собой безразмерную форму выражения перепада давления (сопротивления) на заданном участке потока жидкости.

Критерий Струхала в случае аperiodического нестационарного движения жидкости представляет собой безразмерную форму выражения текущего времени.

Критерий Рейнольдса выражает меру отношения сил инерции и сил сопротивления, обусловленных вязкостью, а критерий Фруда – меру отношения сил инерции и сил тяжести.

В случае стационарного потока критерий Струхала отпадает и уравнение (6.1) приобретает вид:

$$Eu = (Re, Fr). \quad (6.2)$$

Одновременное соблюдение для натурального объекта и модели равенства критериев Re и Fr , а именно:

$$Re = \frac{\nu_H l_H}{\nu_M} = \frac{\nu_M l_M}{\nu_H}$$

и

$$Fr = \frac{\nu_H^2}{gl_H} = \frac{\nu_M^2}{gl_M}, \quad (6.3)$$

далеко не всегда возможно, так как в моделях, меньших по сравнению с натурой размеров, должна применяться менее вязкая жидкость. Отношение кинематических вязкостей «модельной» и «натуральной» жидкости определяется из условий, выраженных равенствами (6.3):

$$\frac{\nu_M}{\nu_H} = \frac{\nu_M l_M}{\nu_H l_H} = \frac{l_M}{l_H} \sqrt{\frac{l_M}{l_H}} = \left(\frac{l_M}{l_H} \right)^{3/2}.$$

Естественно, что чем меньше будет масштаб модели, тем затруднительнее окажется подбор «модельной» жидкости.

В связи с этим при моделировании чаще всего руководствуются лишь одним из критериев, входящих в уравнение (6.3), а именно тем, который для данной задачи имеет более существенное значение.

В случае движения жидкости по трубопроводу решающую роль в определении величины перепада давления играют силы вязкости, а силы тяжести оказываются либо очень малы, либо вовсе отсутствуют (при горизонтальном расположении трубопровода). В таком случае уравнение подобия принимает вид:

$$Eu = f(Re). \quad (6.4)$$

При больших значениях критерия Рейнольдса, свидетельствующих о значительном преобладании инерционных сил над вязкими, последними можно пренебречь. Тем самым критерий Рейнольдса оказывается исключенным из уравнения (6.4), определяющего существование гидродинамического подобия, и критерий Эйлера становится постоянной величиной:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \nu^2} = \text{const}.$$

Область значений критерия Re , в которой он практически лишается

роли критерия подобия, называется областью турбулентной автомодельности.

Подобие температурных полей в твердых телах

Анализ дифференциального уравнения молекулярной теплопроводности и уравнения, выражающего закон теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой, приводит к следующему уравнению подобия:

$$\bar{g} = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \text{Bi}, \text{Fo}, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}, \dots, \frac{l_n}{l_0}\right). \quad (6.5)$$

Здесь $\text{Bi} = \alpha l_0 / \lambda$ – критерий Био, характеризующий связь между температурным полем внутри тела и интенсивностью теплообмена на его границах (α – коэффициент теплообмена, задаваемый по условию задачи); $\text{Fo} = at / l_0^2$ – критерий Фурье, который в случае аperiodического процесса теплопроводности представляет собой безразмерную форму выражения текущего времени; $l_1 / l_0, \dots$ – геометрические параметры тела, выраженные в долях одного из них, выбранного в качестве масштаба измерения длин, а $x / l_0, \dots$ – безразмерные переменные координаты.

Определяемой величиной в уравнении (6.5) является текущая безразмерная температура

$$\bar{g} = \frac{T - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}},$$

где T_0 и $T_{\text{ср}}$ – начальная температура тела и температура среды, соответственно.

Для одномерного температурного поля уравнение (6.5) принимает

вид:
$$\bar{g} = f\left(\frac{x}{l_0}, \text{Bi}, \text{Fo}\right).$$

П Р И М Е Р Ы

1. Сопротивление сложного участка трубопровода диаметром $d_{\text{н}} = 200$ мм, по которому протекает окись углерода при $T = 327$ °С и $p = 1$ атм ($\nu_{\text{н}} = 5,206 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\rho_{\text{н}} = 0,5685$ кг/м³), решено определить на

модели, изготовленной в 1/4 натуральной величины, путем продувания воздуха при $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ и $p = 1,0 \text{ атм}$ ($\nu_M = 1,511 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho_M = 1,2045 \text{ кг/м}^3$).

Определить:

а) с какой средней скоростью ν_M следует вести продувку на модели, если средняя скорость потока окиси углерода в трубе составляет $\nu_H = 10 \text{ м/с}$.

б) какова будет потеря напора на исследуемом участке трубопровода при указанной скорости, если на модели при требуемой для нее скорости потеря напора оказалась равной $\Delta p_M = 1,20 \text{ м вод. ст.}$

Решение.

Среднюю скорость воздуха, которая должна быть задана на модели, определяем из условия равенства для природы и модели критерия

Рейнольдса:
$$\text{Re} = \frac{\nu_H d_H}{\nu_H} = \frac{\nu_M d_M}{\nu_M},$$

откуда следует, что

$$\nu_M = \nu_H \frac{d_H \nu_M}{d_M \nu_H} = 10 \frac{0,2 \cdot 1,511 \cdot 10^{-5}}{0,05 \cdot 5,206 \cdot 10^{-5}} = 11,6 \text{ м/с}.$$

Сопротивление исследуемого участка трубопровода найдем из условия равенства для природы и модели числа Эйлера:

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p_H}{\rho_H \nu_H^2} = \frac{\Delta p_M}{\rho_M \nu_M^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta p_H = \Delta p_M \frac{\rho_H}{\rho_M} \left(\frac{\nu_H}{\nu_M} \right)^2 = 1,2 \frac{0,5685}{1,2045} \left(\frac{10}{11,6} \right)^2 = 0,42 \text{ м вод. ст.}$$

2. Необходимо методом моделирования исследовать распределение температур в длинном стальном валу ($d_H = 2R_{0H} = 400 \text{ мм}$) через $t_H = 2 \text{ ч}$ после загрузки его в печь.

Для стального вала $\lambda_H = 38 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $a_H = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи к поверхности вала в печи $\alpha_H = 110 \text{ Вт/(м}^2 \text{ К)}$.

Модель вала выполнена из легированной стали, для которой $\lambda_M = 14,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $a_M = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи к модели вала в лабораторной печи $\alpha_M = 150 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$.

Определить диаметр d_M модели вала и интервал времени t_M , через который необходимо начать измерение поля температур в модели.

Р е ш е н и е.

Определяем значения критерия Био и числа Фурье для вала:

$$Bi = \frac{\alpha_H R_{0H}}{\lambda_H} = \frac{110 \cdot 0,2}{38} = 0,578;$$

$$Fo = \frac{a_H t_H}{R_{0H}^2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,2^2} = 1,64.$$

Из условия $Bi_M = Bi_H$ находим диаметр вала модели:

$$d_M = 2R_{0M} = 2 \frac{\lambda_M}{\alpha_M} Bi = 2 \frac{14,5}{150} \cdot 0,578 = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм}.$$

Из условия $Fo_M = Fo_H$ находим интервал времени:

$$t_M = \frac{R_{0M}^2}{a_M} Fo = \frac{0,056^2}{4,8 \cdot 10^{-6}} 1,64 = 1070 \text{ с}.$$

3. Определить диаметр модели вала d_M и необходимое значение коэффициента теплоотдачи α_M , при которых температурное поле в модели вала станет подобным температурному полю в образце в условиях примера 2 через $t_M = 10$ мин после загрузки его в печь.

Определить также соотношение между значениями температур для сходственных точек образца и модели, если известно, что их температуры при загрузке были одинаковы и равны $T_{0H} = T_{0M} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, а температуры сред в печах составляли $T_{cp, H} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{cp, M} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$.

Р е ш е н и е.

Диаметр модели вала, удовлетворяющий заданному интервалу времени t_M , находим из условия $Fo_M = Fo$:

$$d_M = 2R_{0M} = 2 \sqrt{\frac{a_M t_M}{Fo}} = 2 \sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 60}{1,64}} = 0,084 \text{ м}.$$

Из условия $Bi_M = Bi$ находим требуемое значение коэффициента теплоотдачи для модели:

$$\alpha_M = \frac{\lambda_M}{R_{0M}} Bi = \frac{14,5}{0,042} 0,578 = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Соотношение между температурами для сходственных точек образца и модели найдем из равенства безразмерных температур: $\bar{g}_H = \bar{g}_M$,

или
$$\frac{T_H - T_{\text{ср}H}}{T_{0H} - T_{\text{ср}H}} = \frac{T_M - T_{\text{ср}M}}{T_{0M} - T_{\text{ср}M}}.$$

Имеем:
$$T_H = \frac{T_{\text{ср}H} - T_{0H}}{T_{\text{ср}M} - T_{0M}} (T_M - T_{\text{ср}M}) + T_{\text{ср}H} =$$

$$= \frac{1000 - 20}{200 - 20} (T_M - 200) + 1000 = 5,44T_M - 88 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

ЗАДАЧИ

6.1. По трубе диаметром $d_1 = 300$ мм протекает воздух со средней скоростью $v_1 = 4$ м/с при $T = 20$ °С и $p = 1$ атм, ($\nu_1 = 1,511 \cdot 10^{-5}$ м²/с).

Определить, какая скорость v_2 должна быть задана для воды при $T = 20$ °С ($\nu_2 = 1,0 \cdot 10^{-6}$ м²/с) в трубе диаметром $d_2 = 100$ мм, чтобы потоки в обеих трубах были гидродинамически подобными.

6.2. Для измерения расхода природного газа в газопроводе диаметром $d_H = 400$ мм предполагается установить диафрагму, характеристики которой определялись на модели, изготовленной в 1/4 натуральной величины. В модели протекала вода при 20 °С.

Опыты показали, что при расходе воды $Q_M \geq 39,4$ м³/ч на модели устанавливается режим автомодельной турбулентности.

Определить соответствующий этому режиму минимальный расход природного газа в натуре Q_H .

Температура и давление природного газа $T = 20$ °С, $p = 1,0$ атм ($\rho_H = 0,72$ кг/м³, $\mu_H = 1,09 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м²).

Для воды при 20 °С $\nu_M = 1,0 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Указание. Для режима автомодельной турбулентности $Eu = \text{const}$.

6.3. Пользуясь условиями предыдущей задачи, определить каким должен быть перепад пьезометрических высот на диафрагме в газопроводе Δh_{H} при расходе природного газа $Q_{\text{H}} = 5000 \text{ м}^3/\text{ч}$, если на модели при расходе воды $Q_{\text{M}} = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$ он оказался равным $\Delta h_{\text{M}} = 136,0 \text{ мм рт. ст.}$

Указание. При заданных расходах Q_{H} и Q_{M} оба потока находятся в автомодельной области.

6.4. Исследование сопротивления элемента воздушного подогревателя выполнено на водяной модели, изготовленной в 1/5 натуральной величины. Средняя скорость и температура воздуха, протекающего в образце, равны соответственно $v_{\text{H}} = 5 \text{ м/с}$, $T_{\text{H}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Физические параметры воздуха при этой температуре $\rho_{\text{H}} = 0,972 \text{ кг/м}^3$, $\nu_{\text{H}} = 23,13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

В модели протекала вода при температуре $T_{\text{M}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\rho_{\text{M}} = 998,2 \text{ кг/м}^3$, $\nu_{\text{M}} = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$). Сопротивление модели оказалось равным $\Delta p_{\text{M}} = 200 \text{ мм вод. ст.}$

Определить среднюю скорость воды U_{M} , которую следовало задать на модели, и сопротивление элемента воздушного подогревателя Δp_{H} .

6.5. Стальной слиток в форме куба с длиной ребра $l_{\text{H}} = 0,5 \text{ м}$, начальная температура которого $T_{0\text{H}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, помещен для нагрева в печь с температурой $T_{\text{ср, H}} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$.

Исследование распределений температур в слитке в процессе нагрева проводится на модели, выполненной из титана. Начальная температура титанового слитка $T_{0\text{M}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура лабораторной печи $T_{\text{ср M}} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$.

Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи для слитков соответственно равны.

Стального:

$$\lambda_{\text{H}} = 65,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad a_{\text{H}} = 21 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha_{\text{H}} = 120 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Титанового:

$$\lambda_M = 15,1 \text{ Вт/(м·К)}, a_M = 6,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_M = 100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Определить характеристический размер титанового слитка (длину ребра l_M) и интервал времени t_M , через который необходимо начать измерение поля температур в модели, если желательно выяснить, каково распределение температур в стальном слитке через $t_H = 1$ ч после его загрузки в печь. Определить также соотношение между температурами в сходственных точках образца и модели.

6.6. По условиям предыдущей задачи определить, какими должны быть характеристический размер модели слитка l_M и коэффициент теплоотдачи α_M , чтобы температурное поле в модели слитка стало подобным температурному полю в образце через $t_M = 5$ мин после загрузки модели в печь.

6.7. Стальной шар диаметром $d_H = 2R_{0H} = 0,2$ м, нагретый до температуры $T_{0H} = 900$ °С, погружен в масляную ванну, имеющую температуру $T_{ср H} = 100$ °С.

Исследование температурного поля в шаре проводится на модели выполненной из бетона, нагретой до температуры $T_{0M} = 100$ °С и охлаждаемой в потоке воздуха, температура которого $T_{ср M} = 20$ °С.

Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи для шара соответственно равны.

Стального:

$$\lambda_H = 57,0 \text{ Вт/(м·К)}, a_H = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_H = 600 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Бетонного:

$$\lambda_M = 1,275 \text{ Вт/(м·К)}, a_M = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_M = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Определить диаметр модели d_M , интервал времени t_M , через который температурное поле в модели будет подобно температурному полю в образце через $t_H = 3$ мин после начала охлаждения, и соотношение между температурами для образца и модели в сходственных точках.

7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Нестационарная теплопроводность

К числу наиболее распространенных задач нестационарной теплопроводности относятся задачи об определении температурного поля при нагревании или охлаждении тел. Для тел, в которых распределение температуры зависит только от одной координаты (неограниченная пластина, неограниченный цилиндр и шар), интегрирование уравнения теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (7.1)$$

при начальном условии $t = 0, T = T_0$ и граничном условии третьего рода

$$\alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{ср}}) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{п}},$$

где $T_{\text{п}}$ и $T_{\text{ср}}$ – температуры поверхности тела и окружающей среды,

соответственно, а $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{п}}$ – градиент температуры в тонком поверхностном слое тела, дает следующие решения. Для неограниченной пластины:

$$\bar{\vartheta} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\beta_i) \text{Cos}(\beta_i \bar{x})}{\beta_i + \text{Sin}(\beta_i) \text{Cos}(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 \text{Fo}), \quad (7.2)$$

где $\bar{\vartheta} = \frac{T - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}}$ – текущая безразмерная температура; $\bar{x} = x / \delta$ – без-

размерная координата и δ – полутолщина пластины, принятая в качестве

характерного размера; $\text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}$ – критерий Фурье, β_i – корни трансцен-

дентного уравнения:

$$\text{ctg} \beta = \frac{\beta}{\text{Bi}}. \quad (7.3)$$

Здесь $\text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$ – критерий Био.

Из уравнений (7.2) и (7.3) следует, что безразмерная температура $\bar{\vartheta}$ является функцией трех величин: x , Bi , Fo :

$$\bar{\vartheta} = f(\bar{x}, Bi, Fo) . \quad (7.4)$$

Для температуры $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$ в средней плоскости пластины и $\bar{\vartheta}_{\text{п}}$ на ее поверхности безразмерная координата \bar{x} , являющаяся одним из аргументов в уравнении (7.2) или (7.4), становится постоянной величиной (для средней плоскости: $\bar{x}_{\text{ц}} = 0$, а для поверхности: $\bar{x}_{\text{п}} = \delta/\delta = 1$). Следовательно, для этих случаев указанное уравнение упрощается. Для температуры средней плоскости пластины оно принимает вид:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\beta_i)}{\beta_i + \text{Sin}(\beta_i)\text{Cos}(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.5)$$

или
$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = f_1(Bi, Fo),$$

а для температуры поверхности:

$$\bar{\vartheta}_{\text{п}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\beta_i)\text{Cos}(\beta_i)}{\beta_i + \text{Sin}(\beta_i)\text{Cos}(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.6)$$

или
$$\bar{\vartheta}_{\text{п}} = f_2(Bi, Fo).$$

Для определения безразмерных температур $\bar{\vartheta}_{\text{п}}$ и $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$ удобно пользоваться номограммами $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}(Bi, Fo)$ и $\bar{\vartheta}_{\text{п}}(Bi, Fo)$, построенными по уравнениям (7.5) и (7.6) и представленными на рис. 7.1 и 7.2 соответственно.

Относительное изменение энтальпии пластины определяется уравнением:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}^2(\beta_i)}{\beta_i^2 + \beta \text{Sin}(\beta_i)\text{Cos}(\beta_i)} [1 - \exp(-\beta_i^2 Fo)], \quad (7.7)$$

где Q_t – изменение энтальпии пластины (количество тепла, поглощенного пластиной при нагревании или отданного ею в процессе охлаждения) за время t , а Q_0 – полное изменение энтальпии пластины по достижении теплового равновесия с окружающей средой, вычисляемое по формуле:

$$Q_0 = 2C_p \rho S \delta (T_0 - T_{cp}).$$

Здесь C_p , ρ и S – теплоемкость, плотность и площадь поверхности пластины.

Выражение (7.7) может быть представлено в следующей общей форме:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = f(Bi, Fo).$$

График этой функции, изображен на рис. 7.3.

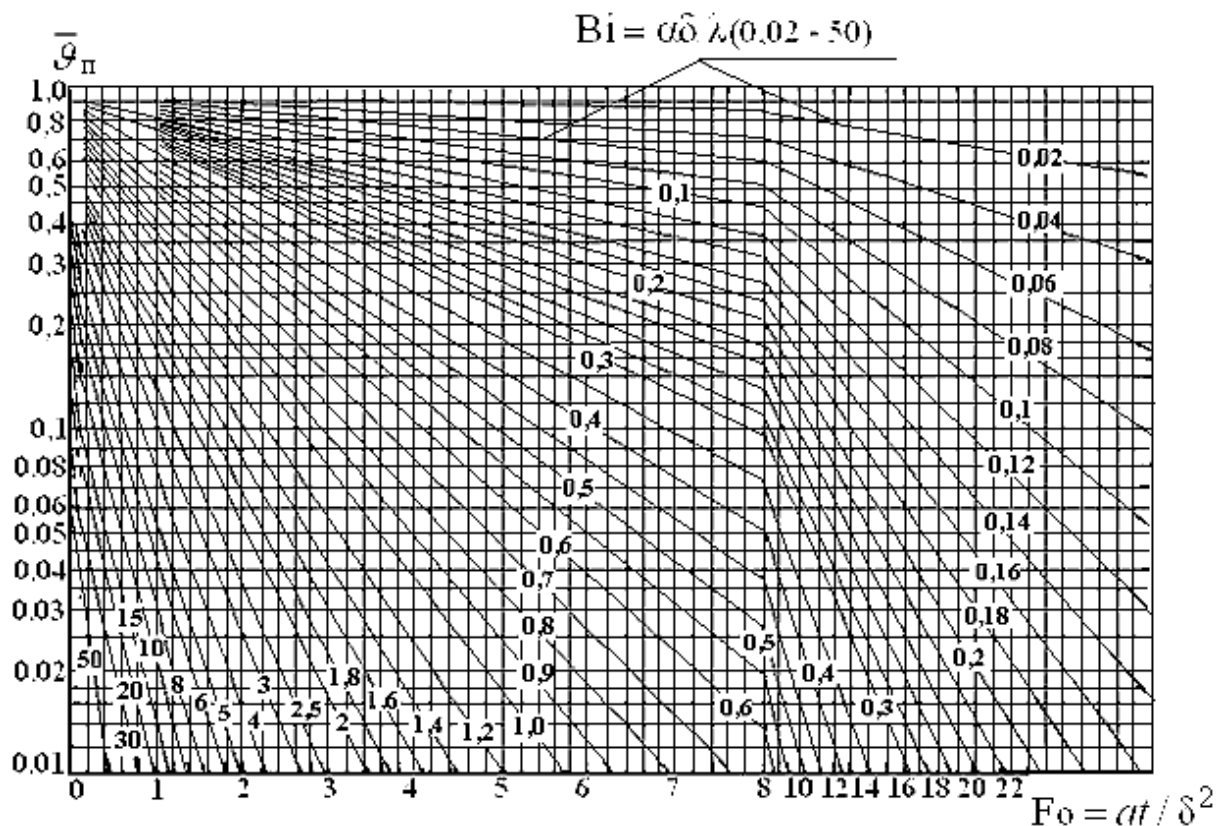


Рис.7.1. Номограмма для расчета температуры на поверхности пластины

При малых значениях критерия Био ($Bi \ll 1$) безразмерные температуры поверхности и середины нагреваемого или охлаждаемого тела почти совпадают.

Действительно, разделив друг на друга уравнения (7.6) и (7.5) для неограниченной пластины и учтя, что при $Bi \rightarrow 0$ бесконечный ряд в каждом из этих уравнений практически сходится к первому члену, получим:

$$\frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0} = \cos \beta_1.$$

Так как при $Bi \rightarrow 0$ $\beta_1 \rightarrow 0$, то $\cos \beta_1 \approx 1$. Следовательно, $\bar{\mathcal{G}}_{\text{п}} \approx \bar{\mathcal{G}}_{\text{п}}$.

Таким образом безразмерную температуру $\bar{\mathcal{G}}$ можно рассматривать как одинаковую во всех точках сечения пластины. Можно показать, что для $0 < Bi \leq 0,1$ величина $\bar{\mathcal{G}}$ дается простым уравнением:

$$\bar{\mathcal{G}} = \exp(-Bi \cdot Fo). \quad (7.8)$$

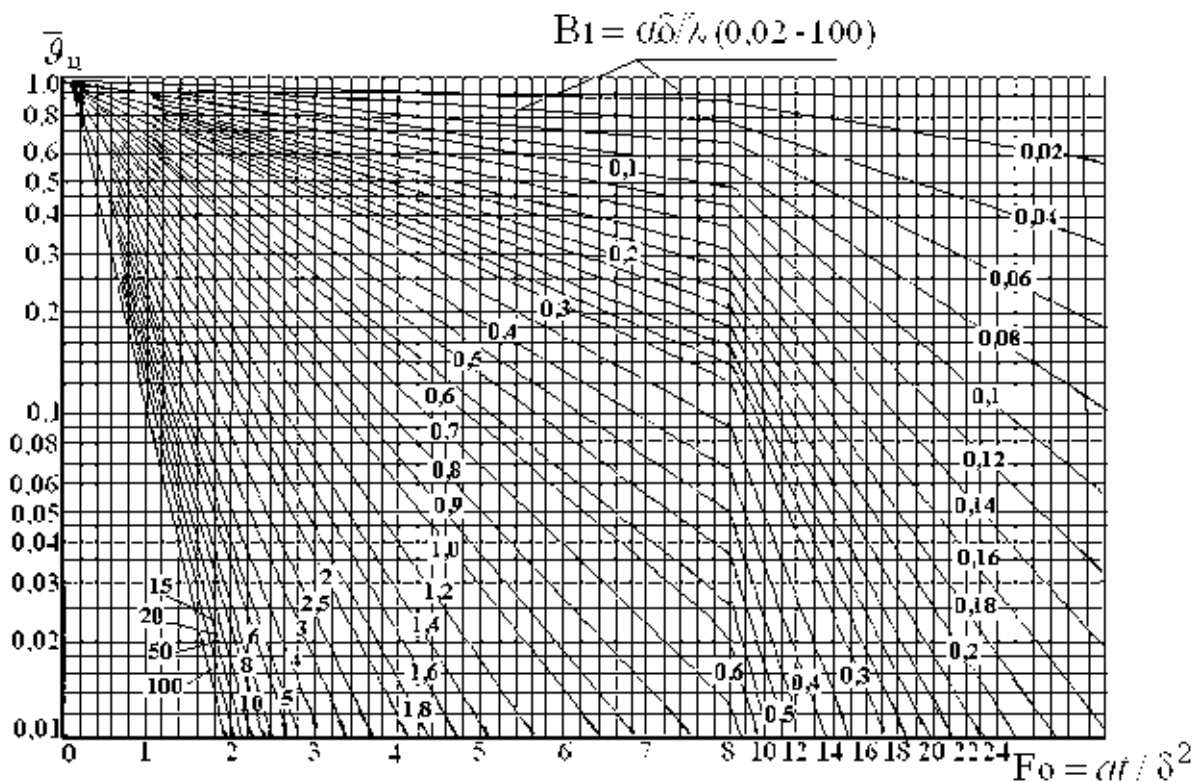


Рис. 7.2. Номограмма для расчета температуры в средней плоскости пластины

Для неограниченного цилиндра имеем:

$$\bar{\mathcal{G}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i) J_0(\beta_i \bar{R})}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.9)$$

Здесь J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка; $\bar{R} = R / R_0$ – безразмерный

текущий радиус, отнесенный к радиусу цилиндра (R_0).

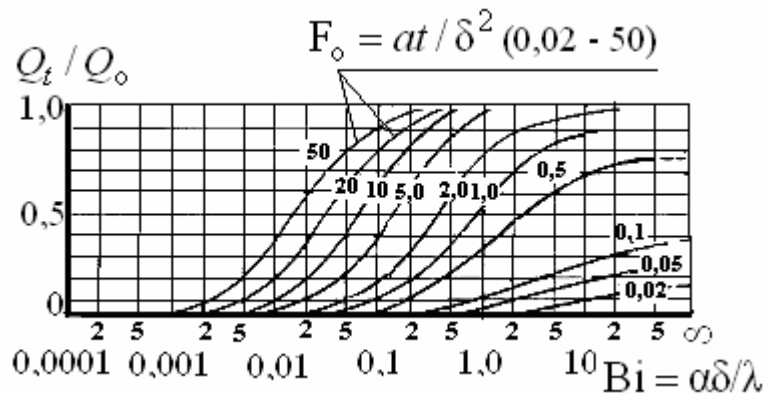


Рис. 7.3. График относительного изменения теплосодержания пластины

Произвольные постоянные β_i определяются как корни трансцендентного уравнения $\beta J_1(\beta) = Bi J_0(\beta)$, выражающего граничное условие третьего рода для данной задачи.

В качестве характеристического размера при вычислении числа Фурье и критерия Био принят радиус цилиндра: $Fo = \frac{at}{R_0^2}$, $Bi = \frac{\alpha R_0}{\lambda}$.

В применении к оси цилиндра ($\bar{R} = 0$) и его поверхности ($\bar{R} = 1$) выражение (7.9) приобретает следующий вид:

$$\bar{g}_{\text{ц}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo);$$

$$\bar{g}_{\text{п}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i) J_0(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo).$$

Относительное изменение теплосодержания участка цилиндра длиной l за время t определяется уравнением:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2} \frac{J_1^2(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} [1 - \exp(-\beta_i^2 Fo)],$$

где $Q_0 = C_p \rho \pi R_0^2 l (T_0 - T_{cp})$ – полное изменение теплосодержания рассматриваемого участка цилиндра при достижении теплового равновесия с окружающей средой. Графики функций

$$\bar{\vartheta}_c = f_1(Bi, Fo), \bar{\vartheta}_n = f_2(Bi, Fo) \text{ и } \frac{Q_t}{Q_0} = f(Bi, Fo)$$

для неограниченного цилиндра представлены на рис. 7.4, 7.5 и 7.6, соответственно.

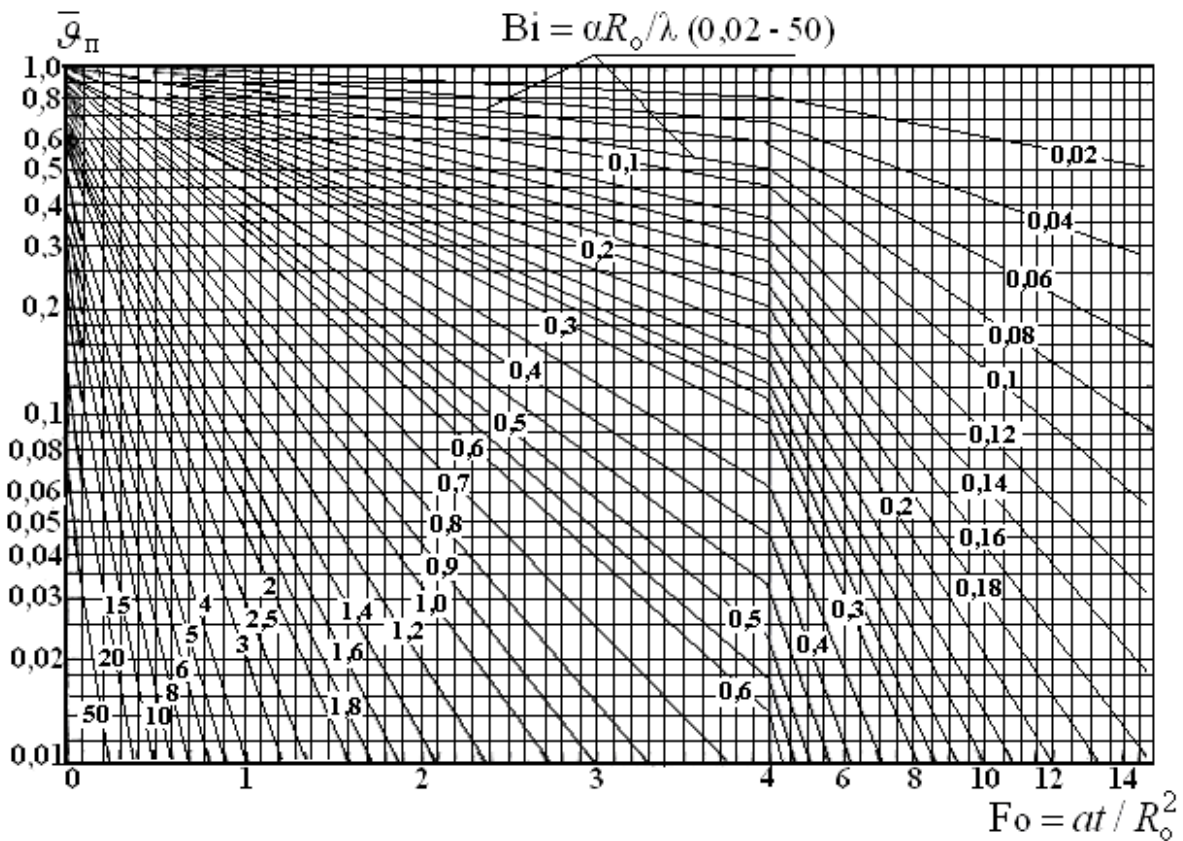


Рис. 7.4. Безразмерная температура ($\bar{\vartheta}_n$) на поверхности цилиндра

Двух- и трехмерные задачи нестационарной теплопроводности

Для неограниченного прямоугольного стержня, который можно рассматривать как тело, образованное пересечением двух взаимно перпендикулярных неограниченных пластин, решение уравнения (7.1) можно представить в виде:

$$\bar{\vartheta}(x, y, t) = \bar{\vartheta}(x, t) \cdot \bar{\vartheta}(y, t). \quad (7.10)$$

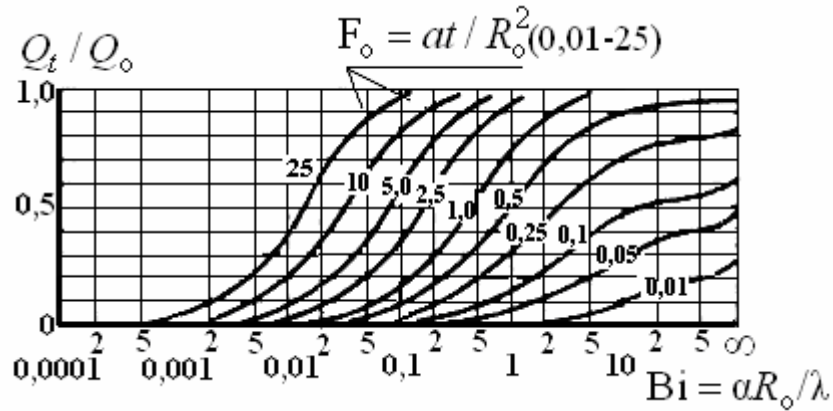


Рис. 7.5. График относительного изменения теплосодержания цилиндра

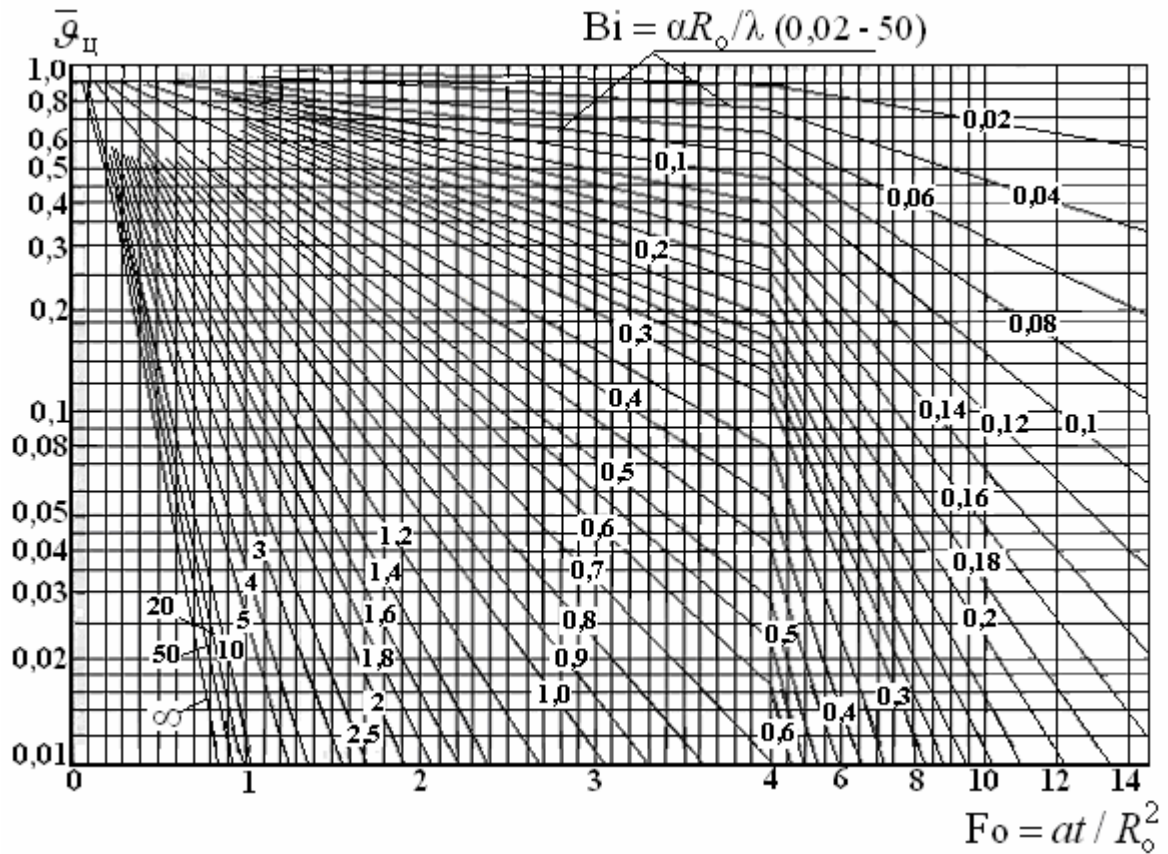


Рис. 7.6. Безразмерная температура на оси ($\bar{\theta}_c$) цилиндра

Аналогичные формы имеют решения уравнения теплопроводности параллелепипеда, который можно рассматривать как тело, образованное пересечением трех взаимно перпендикулярных пластин:

$$\bar{\mathcal{G}}(x, y, z, t) = \bar{\mathcal{G}}(x, t) \cdot \bar{\mathcal{G}}(y, t) \cdot \bar{\mathcal{G}}(z, t). \quad (7.10 \text{ а})$$

Для короткого цилиндра, т. е. для цилиндра, ограниченного торцовыми поверхностями, имеем:

$$\bar{\mathcal{G}}(R, x, t) = \bar{\mathcal{G}}(R, t) \cdot \bar{\mathcal{G}}(x, t). \quad (7.10 \text{ б})$$

Полуограниченное твердое тело

Для полуограниченного твердого тела решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

при граничном условии $T_{x=0} = T_{\Pi} = \text{const}$ имеет вид:

$$\bar{\theta} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (7.11)$$

где $\bar{\theta} = \frac{T - T_{\Pi}}{T_0 - T_{\Pi}}$; $\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz$ и $z = \frac{x}{2\sqrt{at}}$.

Здесь T_{Π} – температура поверхности тела; T_0 – начальная температура, одинаковая во всех точках тела, а $\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$ – функция ошибок Гаусса.

Значения этой функции в зависимости от значений аргумента z приводятся в табл. 7.1.

Плотность теплового потока на поверхности полуограниченного твердого тела определяется уравнением:

$$q_{\Pi} = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} (T_{\Pi} - T_0),$$

где $b = \sqrt{\lambda C_p \rho}$ – коэффициент теплоусвоения [Дж/(м² · К · с^{1/2})].

Расход тепла через единицу поверхности тела за время t составляет:

$$Q_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b (T_{\Pi} - T_0) \sqrt{t}. \quad (7.12)$$

Таблица 7.1

Функция ошибок Гаусса

| z | $\text{erf}(z)$ | z | $\text{erf}(z)$ | z | $\text{erf}(z)$ | z | $\text{erf}(z)$ |
|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|
| 0.00 | 0.000 000 | 0.60 | 0.603 856 | 1.20 | 0.910 314 | 1.80 | 0.989 091 |
| 0.01 | 0.011283 | 0.61 | 0.611681 | 1.21 | 0.912 956 | 1.81 | 0.989 525 |
| 0.02 | 0.022 565 | 0.62 | 0.619 411 | 1.22 | 0.915 534 | 1.82 | 0.989 943 |
| 0.03 | 0.033 841 | 0.63 | 0.627 046 | 1.23 | 0.918 050 | 1.83 | 0.990 347 |
| 0.04 | 0.045 111 | 0.64 | 0.634 586 | 1.24 | 0.920 505 | 1.84 | 0.990 736 |
| 0.05 | 0.056 372 | 0.65 | 0.642 029 | 1.25 | 0.922 900 | 1.85 | 0.991 111 |
| 0.06 | 0.067 622 | 0.66 | 0.649 377 | 1.26 | 0.925 236 | 1,86 | 0.991 472 |
| 0.07 | 0.078 858 | 0.67 | 0.656 628 | 1.27 | 0.927 514 | 1.87 | 0.991 821 |
| 0.08 | 0.090 078 | 0.68 | 0.663 782 | 1.28 | 0.929 734 | 1.88 | 0.992 156 |
| 0.09 | 0.101 281 | 0.69 | 0.670 840 | 1.29 | 0.931 899 | 1.89 | 0.992 479 |
| 0.10 | 0.112 463 | 0.70 | 0.677 801 | 1.30 | 0.934 008 | 1.90 | 0.992 790 |
| 0.11 | 0.123 623 | 0.71 | 0.684 666 | 1.31 | 0.936 063 | 1.91 | 0.993 090 |
| 0.12 | 0.134 738 | 0.72 | 0.691 433 | 1.32 | 0.938 065 | 1.92 | 0.993 378 |
| 0.13 | 0.145 867 | 0.73 | 0.698 104 | 1.33 | 0.940 015 | 1.93 | 0.993 656 |
| 0.14 | 0.156 947 | 0.74 | 0.704 678 | 1.34 | 0.941914 | 1.94 | 0.993 923 |
| 0.15 | 0.167 996 | 0.75 | 0.711 156 | 1.35 | 0.943 762 | 1.95 | 0.994179 |
| 0.16 | 0.179 012 | 0.76 | 0.717 537 | 1.36 | 0.945 561 | 1.96 | 0.994 426 |
| 0.17 | 0.189 992 | 0.77 | 0.723 822 | 1.37 | 0.947 312 | 1.97 | 0.994 664 |
| 0.18 | 0.200 936 | 0.78 | 0.730 010 | 1.38 | 0.949 016 | 1.98 | 0.994 892 |
| 0.19 | 0.211840 | 0.79 | 0.736 103 | 1.39 | 0.950 673 | 1.99 | 0.995111 |
| 0.20 | 0.222 703 | 0.80 | 0.742 101 | 1.40 | 0.952 285 | 2.00 | 0.995 322 |
| 0.21 | 0.233 522 | 0.81 | 0.748 003 | 1.41 | 0.953 852 | 2.01 | 0.995 525 |
| 0.22 | 0.244 296 | 0.82 | 0.753 811 | 1.42 | 0.955 376 | 2.02 | 0.995 719 |
| 0.23 | 0.255 023 | 0.83 | 0.759 524 | 1.43 | 0.956 857 | 2.03 | 0.995 906 |
| 0.24 | 0.265 700 | 0.84 | 0.765 143 | 1.44 | 0.958 297 | 2.04 | 0.996 086 |
| 0.25 | 0.276 326 | 0.85 | 0.770 668 | 1.45 | 0.959 695 | 2.05 | 0.996 258 |
| 0.26 | 0.256 900 | 0.86 | 0.776 100 | 1.46 | 0.961 054 | 2.06 | 0.996 423 |
| 0.27 | 0.297 418 | 0.87 | 0.781 440 | 1.47 | 0.962 373 | 2.07 | 0.996 582 |
| 0.28 | 0.307 880 | 0.88 | 0.786 687 | 1.48 | 0.963 654 | 2.08 | 0.996 734 |
| 0.29 | 0.318 283 | 0.89 | 0.791 843 | 1.49 | 0.961 898 | 2.09 | 0.996 880 |
| 0.30 | 0.328 627 | 0.90 | 0.796 908 | 1.50 | 0.966 105 | 2.10 | 0.997 021 |
| 0.31 | 0.338 908 | 0.91 | 0.801 883 | 1.51 | 0.967 277 | 2.11 | 0.997 155 |
| 0.32 | 0.349 126 | 0.92 | 0.806768 | 1.52 | 0.968 413 | 2.12 | 0.997 284 |
| 0.33 | 0.359 279 | 0.93 | 0.811564 | 1.53 | 0.969 516 | 2.13 | 0.997 407 |
| 0.34 | 0.369 365 | 0.94 | 0.816 271 | 1.54 | 0.970 586 | 2.14 | 0.997 525 |
| 0.35 | 0.379 382 | 0.95 | 0.820 891 | 1.55 | 0.971 623 | 2.15 | 0.997 639 |
| 0,36 | 0.389 330 | 0.96 | 0.825 424 | 1.56 | 0.972 628 | 2.16 | 0.997 747 |
| 0.37 | 0.399 206 | 0.97 | 0.829 870 | 1.57 | 0.973 603 | 2.17 | 0.997 851 |
| 0.38 | 0.409 009 | 0.98 | 0.834 232 | 1.58 | 0.974 547 | 2.18 | 0.997 951 |
| 0.39 | 0.418 739 | 0.99 | 0.838 508 | 1.59 | 0.975462 | 2.19 | 0.998 046 |
| 0.40 | 0.428 392 | 1.00 | 0.842 701 | 1.60 | 0.976 348 | 2.20 | 0.998 137 |

Окончание табл. 7.1

| z | erf (z) | z | erf (z) | z | erf (z) | z | erf (z) |
|------|-----------|------|------------|------|-----------|-------|-----------|
| 0.41 | 0.437 969 | 1.01 | 0.846 810 | 1.61 | 0,977 207 | 2.21 | 0.998 224 |
| 0.42 | 0.447 468 | 1.02 | 0.850 838 | 1.62 | 0.978 038 | 2.22 | 0.998 308 |
| 0.43 | 0.456 887 | 1.03 | 0.854 784 | 1.63 | 0.978 843 | 2.23 | 0.998 388 |
| 0.44 | 0.466 225 | 1.04 | 0.858 650 | 1.64 | 0.979 622 | 2.24 | 0.998 464 |
| 0.45 | 0.475 482 | 1.05 | 0.862 436 | 1.65 | 0.980 376 | 2.25 | 0,998 537 |
| 0.46 | 0.484 655 | 1.06 | 0.866 144 | 1.66 | 0.981 105 | 2.26 | 0.998 607 |
| 0.47 | 0.493 745 | 1.07 | 0.869773 | 1.67 | 0.981 810 | 2.27 | 0.998 674 |
| 0.48 | 0.502 750 | 1.08 | 0,873 326 | 1.68 | 0.982 493 | 2.28 | 0.998 738 |
| 0.49 | 0.511668 | 1.09 | 0.876 803 | 1.69 | 0.983 153 | 2.29 | 0.998 799 |
| 0.50 | 0.520 500 | 1.10 | 0.880 205 | 1.70 | 0.983 790 | 2.30 | 0.998 857 |
| 0.51 | 0.529 244 | 1.11 | 0.883 533 | 1.71 | 0.984 407 | 2.31 | 0.998 912 |
| 0.52 | 0.537 899 | 1.12 | 0.886 788 | 1.72 | 0.985 003 | 2.32 | 0.998 966 |
| 0.53 | 0.546 464 | 1.13 | 0.889 971 | 1.73 | 0.985 578 | 2.3 5 | 0.999 016 |
| 0.54 | 0.554 939 | 1.14 | 0.893 082. | 1.74 | 0.986 135 | 2.34 | 0.999 065 |
| 0.55 | 0.563 323 | 1.15 | 0.896 124 | 1.75 | 0.986 672 | 2.35 | 0.999111 |
| 0.56 | 0.571 616 | 1.16 | 0.899 096 | 1.76 | 0.987 190 | 2.36 | 0.999 155 |
| 0.57 | 0.579 816 | 1.17 | 0.902 000 | 1.77 | 0.987 691 | 2.37 | 0.999 197 |
| 0.58 | 0.587 923 | 1.18 | 0.904 837 | 1.78 | 0.988 174 | 2.38 | 0.999 237 |
| 0.59 | 0.595 936 | 1.19 | 0.907 608 | 1.79 | 0.988 641 | 2.39 | 0.999 275 |

Регулярный режим нагревания и охлаждения тел

Режим нагревания или охлаждения тела, в котором наблюдается линейная зависимость между $\ln \bar{\vartheta}$ и Fo , получил название регулярного:

$$\ln \bar{\vartheta} = A - B \cdot Fo. \quad (7.13)$$

Относительная скорость изменения температуры в регулярном режиме называется темпом регулярного режима и определяется выражением:

$$-\frac{\partial \ln \bar{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta} \partial t} = m = \beta_1^2 \frac{a}{l_0^2},$$

где l_0 – характеристический линейный размер тела.

Когда $Bi \rightarrow \infty$, то $\beta_1 \rightarrow \beta_{1,\max}$, а темп регулярного режима m растет и стремится к своему предельному значению: $m \rightarrow m_\infty$.

Таким образом, имеем (теорема Кондратьева):

$$m_{\infty} = \beta_{1, \max}^2 \frac{a}{l_0^2} = \frac{a}{k_{\Phi}}. \quad (7.14)$$

Величина $k_{\Phi} = (l_0 / \beta_{1, \max})^2$ зависит от формы, размеров тела и называется коэффициентом формы.

Для некоторых тел коэффициент формы k_{Φ} может быть вычислен. Так, для неограниченной пластины ($\beta_{1, \max} = \frac{\pi}{2}$; $l_0 = \delta$):

$$k_{\Phi} = \left(\frac{\delta}{\pi/2}\right)^2 = 4\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2;$$

для неограниченного цилиндра ($\beta_{1, \max} = 2,405$; $l_0 = R_0$):

$$k_{\Phi} = (R_0 / 2,405)^2 = 0,173R_0^2;$$

для шара: $k_{\Phi} = (R_0 / \pi)^2$;

для цилиндра длиной l :

$$k_{\Phi} = 1 / [(2,405 / R_0)^2 + (\pi / l)^2];$$

для параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3 :

$$k_{\Phi} = 1 / [(\pi / l_1)^2 + (\pi / l_2)^2 + (\pi / l_3)^2].$$

Методом регулярного режима часто пользуются для оценки времени нагревания или охлаждения тел. Для этого применяют формулу:

$$\Delta t = \frac{1}{m} \ln \frac{T_1 - T_{\text{ср}}}{T_2 - T_{\text{ср}}}.$$

Здесь $\Delta t = t_2 - t_1$ – время, в течение которого температура в какой-либо точке тела изменяется от T_1 до T_2 . Подобная задача может быть решена чисто теоретически, если известны коэффициенты формы тела k_{Φ} и температуропроводности a , необходимые для вычисления темпа изменения температуры m .

Нестационарная диффузия

Одной из наиболее распространенных задач нестационарной диффузии в твердом теле является задача о диффузии из постоянного источника. Если на поверхности твердого тела концентрация растворенного вещества поддерживается постоянной во время всего процесса диффузии, то распределение концентрации диффундирующего вещества по глубине полуограниченного твердого тела описывается функцией ошибок Гаусса [см. (7.11) и соответствующие пояснения]:

$$\bar{C} = \frac{C - C_{\Pi}}{C_0 - C_{\Pi}} = \operatorname{erf}(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (7.15)$$

Плотность диффузионного потока [кг/(м²·с)] на поверхности тела определяется уравнением:

$$j_{x=0} = (C_{\Pi} - C_0) \sqrt{\frac{D}{\pi t}}.$$

Количество вещества, проходящее через единичную поверхность за время t , равно (кг/м²): $J = 2(C_{\Pi} - C_0) \sqrt{\frac{Dt}{\pi}}$.

В этих уравнениях C_{Π} – концентрация диффундирующего вещества на поверхности тела; C_0 – начальная концентрация диффундирующего вещества в твердом теле.

ПРИМЕРЫ

1. Пластина из хромоникелевой стали (25 % Cr, 20 % Ni), толщиной $2\delta = 40$ мм, имеющая температуру $T_0 = 20$ °С, помещена в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 1200$ °С.

Определить температуру пластины в ее центре $T_{\text{ц}}$ и на поверхности $T_{\text{п}}$ через $t = 15$ мин после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно $\lambda = 12,7$ Вт/(м·К), $a = 3,60 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины $\alpha = 150$ Вт/(м²·К).

Решение.

Определяем значения критериев Фурье и Био для пластины:

$$Fo = \frac{at}{\delta^2} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6} \cdot 15 \cdot 60}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 8,1;$$

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{12,7} = 0,236.$$

Пользуясь графиками $\bar{\mathcal{G}}_{\text{ц}}(Bi, Fo)$ и $\bar{\mathcal{G}}_{\text{п}}(Bi, Fo)$, представленными на рис.

7.1 и 7.2, находим:

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,176 \quad \text{и} \quad \bar{\mathcal{G}}_{\text{п}} = \frac{T_{\text{п}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,158,$$

откуда $T_{\text{ц}} = T_{\text{ср}} + \bar{\mathcal{G}}_{\text{ц}}(T_0 - T_{\text{ср}}) = 1200 + 0,176(20 - 1200) = 850 \text{ }^\circ\text{C}$

и $T_{\text{п}} = T_{\text{ср}} + \bar{\mathcal{G}}_{\text{п}}(T_0 - T_{\text{ср}}) = 1200 + 0,158(20 - 1200) = 886 \text{ }^\circ\text{C}$.

2. Длинный стальной вал диаметром $2R_0 = 400$ мм, нагретый до температуры $T_0 = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, охлаждается в среде с постоянной температурой $T_{\text{ср}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить время t , в течение которого температура поверхности цилиндра понизится до $T_{\text{п}} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали соответственно равны $\lambda = 45,5$ Вт/(м·К), $C_p = 502$ Дж/(кг·К) и $\rho = 7800$ кг/м³. Коэффициент теплоотдачи с поверхности вала в процессе охлаждения остается постоянным и равным $\alpha = 150$ Вт/(м²·К).

Р е ш е н и е.

Определяем коэффициент температуропроводности, безразмерную температуру и критерий Био:

$$a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = \frac{45,5}{502 \cdot 7800} = 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{п}} = \frac{T_{\text{п}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = \frac{300 - 20}{800 - 20} = 0,359;$$

$$Bi = \frac{\alpha R_0}{\lambda} = \frac{150 \cdot 0,2}{45,5} = 0,658.$$

Пользуясь графиком на рис. 7.4 для цилиндра, находим критерий Фурье

$$Fo = \frac{at}{R_0^2} = 0,8.$$

Откуда
$$t = \frac{R_0^2}{a} Fo = \frac{0,2^2 \cdot 0,8}{11,6 \cdot 10^{-6}} = 2760 \text{ с} = 46 \text{ мин.}$$

3. При условиях охлаждения стального вала, рассмотренных в примере 2, определить, какова будет к найденному моменту времени $t = 46$ мин температура на оси вала $T_{\text{ц}}$.

Определить также количество тепла Q_t , которое будет в течение этого времени отдано окружающей среде от $l = 1$ м вала.

Р е ш е н и е.

Температуру на оси вала находим при помощи графика, рассмотренного на рис. 7.6, $\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = f_1(Bi, Fo)$ для цилиндра, откуда следует, что при $Bi = 0,658$ и $Fo = 0,8$ безразмерная температура $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$ равна:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,46.$$

Следовательно, $T_{\text{ц}} = \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(T_0 - T_{\text{ср}}) + T_{\text{ср}} = 0,46(800 - 20) + 20 = 379 \text{ }^\circ\text{C}$.

Для определения количества тепла Q_t воспользуемся графиком $Q_t/Q_0 = f(Bi, Fo)$, представленным на рис. 7.5. При указанных значениях критерия Био и числа Фурье относительное изменение теплосодержания вала оказывается равным $Q_t/Q_0 \approx 0,6$.

Полное количество тепла Q_0 , которое должно быть отдано 1 м вала по достижении теплового равновесия с окружающей средой, найдем по формуле:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \pi R_0^2 \rho C_p (T_0 - T_{\text{ср}}) = 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 7800 \cdot 502 (800 - 20) = \\ &= 396 \cdot 10^6 \text{ Дж/м} = 396 \cdot 10^3 \text{ кДж/м.} \end{aligned}$$

Следовательно, $Q_t \cong 0,6 Q_0 = 0,6 \cdot 396 \cdot 10^3 = 238 \cdot 10^3 \text{ кДж/м}$.

4. Лист алюминия толщиной $2\delta = 20$ мм, прогретый до температуры $T_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$, помещен в воздушную среду, температура которой $T_{\text{ср}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить промежуток времени t , по истечении которого лист примет температуру, отличающуюся не более чем на 1 % от температуры окружающей среды.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности алюминия равны соответственно: $\lambda = 203 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $a = 8,32 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Коэффициент теплоотдачи от поверхности листа к окружающему воздуху

$$\alpha = 60 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Р е ш е н и е.

Определяем значение критерия Био:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{60 \cdot 0,01}{203} = 2,96 \cdot 10^{-3} \ll 0,1.$$

Так как $Bi \ll 0,1$, то можно температуру во всех точках сечения листа считать одинаковой и воспользоваться предельным законом (7.8):

$$\bar{\vartheta} = \exp(-Bi \cdot Fo) = \exp\left[-Bi \left(\frac{at}{\delta^2}\right)\right].$$

Из этого уравнения находим:

$$t = -\frac{\delta^2 \ln \bar{\vartheta}}{a \cdot Bi} = -\frac{0,01^2 \cdot 2,303 \lg \frac{20,2 - 2}{500 - 20}}{8,32 \cdot 10^{-5} \cdot 2,96 \cdot 10^{-3}} = 3190 \text{ с} = 53,2 \text{ мин.}$$

5. Слиток из хромоникелевой стали (18% Cr, 8% Ni) в форме параллелепипеда размерами 300 x 500 x 800 мм, имеющий начальную температуру $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, помещен для нагрева в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру $T_{\text{ц}}$ в центре слитка через $t = 2 \text{ ч}$ после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно: $\lambda = 16,0 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $a = 4,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи на поверхности слитка $\alpha = 160 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Р е ш е н и е.

Для определения температуры $T_{\text{ц}}$ в центре параллелепипеда воспользуемся уравнением (7.10 а):

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}}(x, y, z, t) = \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(x, t) \cdot \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(y, t) \cdot \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(z, t),$$

причем безразмерные температуры в средней плоскости каждой пластины, описываемые уравнениями:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}x} = f_1(Bi_x, Fo_x);$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}y} = f_2(Bi_y, Fo_y);$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}z} = f_3(Bi_z, Fo_z),$$

найдем из графика, представленного на рис. 7.2.

Вычисляем значения критериев Био и Фурье для каждой пластины и, пользуясь указанным графиком, находим для них безразмерные температуры:

$$Bi_x = \frac{\alpha \delta_x}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,15}{16} = 1,5 \text{ и } Fo_x = \frac{at}{\delta_x^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,15^2} = 1,46,$$

откуда $\bar{g}_{цх} = 0,28$;

$$Bi_y = \frac{\alpha \delta_y}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,25}{16} = 2,5 \text{ и } Fo_y = \frac{at}{\delta_y^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,25^2} = 0,527,$$

откуда $\bar{g}_{цy} = 0,6$;

$$Bi_z = \frac{\alpha \delta_z}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,4}{16} = 4,0 \text{ и } Fo_z = \frac{at}{\delta_z^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,4^2} = 0,206,$$

откуда $\bar{g}_{цz} = 0,9$.

Подставляя полученные величины в выражение (7.10 а), получаем

$$\bar{g}_{ц} = \frac{T_{ц} - T_{ср}}{T_0 - T_{ср}} = 0,28 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,151.$$

Следовательно, температура в центре слитка равна

$$T_{ц} = T_{ср} - \bar{g}_{ц} (T_{ср} - T_0) = 1200 - 0,151(1200 - 20) = 1022 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

6. Два листа стали, имеющие начальную температуру $T_0 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ свариваются вместе посредством заливания расплавленного металла между ними. Температура, поддерживаемая на торцах листов в процессе сварки, $T_{п} = 1500 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Считая, что температура $T_{п}$ устанавливается внезапно, и пренебрегая потерями тепла с поверхности листов, определить температуру на расстоянии $x = 10 \text{ мм}$ от торца листа через $t = 20 \text{ с}$ после начала сварки. Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали соответственно равны: $\lambda = 46,3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $C_p = 478 \text{ Дж/(г}\cdot\text{К)}$ и $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Р е ш е н и е.

Для расчета воспользуемся уравнением (7.11), описывающим температурное поле в полуограниченном теле:

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_{п}}{T_0 - T_{п}} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

Вычисляем коэффициент температуропроводности:

$$a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = \frac{46,3}{478 \cdot 7800} = 12,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Определяем значение аргумента функции ошибок Гаусса

$$z = \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{0,01}{2\sqrt{12,4 \cdot 10^{-6} \cdot 20}} = 0,315.$$

По таблице функции ошибок Гаусса находим, что этому значению аргумента отвечает функция, равная 0,344. Следовательно,

$$\frac{T - T_{\text{п}}}{T_0 - T_{\text{п}}} = 0,344.$$

Откуда $T = T_{\text{п}} - 0,344(T_{\text{п}} - T_0) = 1500 - 0,344(1500 - 20) = 992 \text{ }^\circ\text{C}$.

7. По условиям предыдущего примера определить расход тепла Q_t через 1 м^2 торца листа за время $t = 20 \text{ с}$ после начала сварки.

Решение.

Определяем коэффициент теплоусвоения:

$$b = \sqrt{\lambda C_p \rho} = \sqrt{46,3 \cdot 478 \cdot 7800} = 13,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}^{1/2}).$$

Пользуясь уравнением (7.12), находим

$$Q_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b (T_{\text{п}} - T_0) \sqrt{t} = \frac{2 \cdot 13,2 \cdot 10^3 (1500 - 20) \sqrt{20}}{\sqrt{3,14}} = 98,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{м}^2.$$

8. Шар из плавленного кварца радиусом 10 см, имеющий начальную температуру $T_1 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, помещен в среду с температурой $T_{\text{ср}} = 120 \text{ }^\circ\text{C}$. Найти время t , за которое его температура понизится до $T_2 = 130 \text{ }^\circ\text{C}$, если охлаждение протекает в регулярном режиме. Коэффициент температуропроводности плавленного кварца $a = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Решение.

Определим коэффициент формы шара:

$$k_{\text{ф}} = \left(\frac{R_0}{\pi} \right)^2 = \left(\frac{10}{\pi} \right)^2 = 10 \text{ см}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Темп охлаждения шара:

$$m = \frac{a}{k_{\text{ф}}} = \frac{3 \cdot 10^{-7}}{10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}.$$

Время охлаждения составит:

$$t = \frac{1}{m} \ln \frac{T_1 - T_{\text{ср}}}{T_2 - T_{\text{ср}}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{300 - 120}{130 - 120} = 6940 \text{ с} = 1,93 \text{ ч}.$$

9. Углерод диффундирует в β -цирконий при температуре $1600 \text{ }^\circ\text{C}$ из источника с постоянной концентрацией углерода 3 % ат. Через какое

время концентрация углерода на расстоянии 1 мм от поверхности станет равной 0,3 % ат. Коэффициент диффузии углерода в β -цирконии при указанной температуре составляет $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$.

Р е ш е н и е.

В рассматриваемой задаче первоначальная концентрация углерода в цирконии равна нулю, поэтому формула (7.15), описывающая распределение концентрации по глубине твердого тела, принимает вид:

$$1 - \frac{C - C_{\Pi}}{C_{\Pi}} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

отсюда
$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = 1 - \frac{C}{C_{\Pi}} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

По таблице функции ошибок Гаусса находим, что значению функции 0,9 соответствует значение аргумента 1,17, следовательно, $\frac{x}{2\sqrt{Dt}} = 1,17$.

Таким образом, имеем:

$$t = \frac{x^2}{1,17^2 \cdot 4D} = \frac{(10^{-3})^2}{1,17^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^{-10}} = 608 \text{ с} \cong 10 \text{ мин.}$$

З А Д А Ч И

7.1. Стальная пластина толщиной $2\delta = 80 \text{ мм}$, имеющая температуру $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, помещена в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить время нагрева t , необходимое для того, чтобы температура в средней плоскости пластины достигла величины $T_{\Pi} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить также температуру T_{Π} на поверхности пластины в конце нагрева.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно: $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $C_D = 445 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $\rho = 7800 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины $\alpha = 120 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

7.2. Определить количество тепла Q_t , воспринятого 1 м^2 поверхности пластины, описанной в задаче № 7.1, за найденное по условиям этой задачи время нагрева.

7.3. Для условий задачи № 7.1 определить значения температур в средней плоскости и на поверхности пластины через $t = 20 \text{ мин}$ после начала нагрева.

7.4. Стальная пластина толщиной $2\delta = 200 \text{ мм}$, имевшая температуру $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, была помещена в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру пластины в ее средней плоскости $T_{\text{ц}}$ и на поверхности $T_{\text{п}}$ через $t = 1,5$ ч после начала нагрева. Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно: $\lambda = 45,7$ Вт/(м·К); $a = 10,3 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины $\alpha = 160$ Вт/(м²·К).

7.5. Используя условия задачи № 7.4, определить промежуток времени t , по истечении которого температура на поверхности пластины достигнет величины $T_{\text{п}} = 980$ °С.

Определить также температуру $T_{\text{ц}}$ в средней плоскости пластины в конце нагрева.

7.6. Длинный стальной вал диаметром $2R_0 = 300$ мм, нагретый до температуры $T_0 = 1000$ °С, помещен для охлаждения в воздушную среду с температурой $T_{\text{ср}} = 20$ °С.

Рассчитать температуру на оси вала для интервалов времени $t = 0,5, 1, 2$ и 3 ч после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно $\lambda = 48,5$ Вт/(м·К); $C_p = 511$ Дж/(кг·К); $\rho = 7860$ кг/м³. Коэффициент теплоотдачи с поверхности вала в процессе охлаждения остается постоянным и равным $\alpha = 150$ Вт/(м²·К).

7.7. Для условий задачи № 7.6 определить количество тепла, отданное окружающей среде 1 м вала в процессе охлаждения за указанные промежутки времени.

7.8. Длинный стальной цилиндр диаметром $2R_0 = 360$ мм, имеющий температуру $T_0 = 20$ °С, помещен в печь с температурой $T_{\text{ср}} = 800$ °С.

Определить температуру цилиндра на его оси $T_{\text{ц}}$ и на поверхности $T_{\text{п}}$ через $t = 1$ ч после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно: $\lambda = 40$ Вт/(м·К); $a = 9,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Коэффициент теплоотдачи на поверхности цилиндра $\alpha = 120$ Вт/(м²·К).

7.9. По условиям задачи № 7.8 определить время t , в течение которого температура поверхности цилиндра достигнет величины $T_{\text{п}} = 780$ °С. Определить также температуру $T_{\text{ц}}$ на оси цилиндра в конце нагрева.

7.10. Определить время t , необходимое для нагрева листа меди толщиной $2\delta = 40$ мм до 600 °С. Лист имел начальную температуру $T_0 = 20$ °С и был помещен в печь с температурой $T_{\text{ср}} = 750$ °С. Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности меди равны соответственно: $\lambda = 395$ Вт/(м·К); $a = 1,164 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

Коэффициент теплоотдачи на поверхности листа $\alpha = 60 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

Указание. Так как при данных условиях $Bi \ll 0,1$, то можно для расчета воспользоваться предельным законом: $\bar{\theta} = \exp(-Bi \cdot Fo)$.

7.11. Длинный прямоугольный стержень из углеродистой стали размерами $80 \times 160 \text{ мм}$ помещен в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$. $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Определить температуру на оси стержня $T_{x=0, y=0}$ и на

осевых линиях его граней $\left(T_{x=\delta, y=0} \text{ и } T_{x=0, y=\delta} \right)$ через $t = 25 \text{ мин}$

после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно: $\lambda = 53,3 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $a = 14,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи на поверхности стержня $\alpha = 160 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

7.12. Используя условия предыдущей задачи, найти температуру $T_{x=\delta, y=\delta}$ на ребрах стержня.

7.13. Стальной брусок размерами $160 \times 240 \times 800 \text{ мм}$, нагретый до температуры $T_0 = 850 \text{ }^\circ\text{C}$, погружен в масляную ванну, имеющую температуру $T_{\text{сп}} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру $T_{x=0, y=0, z=0}$ в центре бруска через 30 мин после начала охлаждения.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно: $\lambda = 57 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $a = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи на поверхности бруска $\alpha = 600 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

7.14. При условиях охлаждения стального бруска, указанных в задаче № 7.13, определить температуры $T_{x=\delta, y=0, z=0}$;

$T_{x=0, y=\delta, z=0}$ и $T_{x=0, y=0, z=\delta}$ в середине граней бруска.

7.15. Болванка из алюминиевой бронзы (95 % Cu, 5 % Al) цилиндрической формы диаметром $2R_0 = 200 \text{ мм}$ и длиной $2\delta = 400 \text{ мм}$, имеющая температуру $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, помещена в печь с температурой $T_{\text{сп}} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру $T_{x=0, R=0}$ в центре болванки и $T_{x=\delta, R=0}$ в середине торцевой поверхности через $t = 30 \text{ мин}$ после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно: $\lambda = 82,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $a = 23,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи на поверхности болванки $\alpha = 116 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$.

7.16. Графитовый блок в форме параллелепипеда размерами 400 x 600 x 800 мм, нагретый до температуры $T_0 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, охлаждается на воздухе, который имеет температуру $T_{\text{ср}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру $T_{\text{ц}}$ в центре блока через $t = 1 \text{ ч}$ после начала охлаждения.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности графита равны соответственно: $\lambda = 144,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $a = 110 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Коэффициент теплоотдачи на поверхности блока $\alpha = 130 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$.

7.17. При условиях охлаждения графитового блока, указанных в задаче № 7.16, определить температуры $T_{x=\delta_x, y=0, z=0}$; $T_{x=0, y=\delta_y, z=0}$ и $T_{x=0, y=0, z=\delta_z}$ в середине граней блока.

7.18. Поверхность стального слитка, равномерно нагретого до температуры $T_0 = 700 \text{ }^\circ\text{C}$, внезапно охлаждена до $T_{\text{п}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Рассматривая температурное поле в слитке как одномерное, определить температуру на глубине $x = 200 \text{ мм}$ от поверхности через $t = 1 \text{ ч}$ после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно: $\lambda = 48,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$; $C_p = 511 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$; $\rho = 7860 \text{ кг/м}^3$.

7.19. При условиях охлаждения стального слитка, рассмотренных в задаче № 7.18, определить количество тепла Q_t , отданное 1 м^2 поверхности слитка, за время охлаждения.

7.20. По условиям задачи № 7.18 определить время, в течение которого температура на глубине $x = 200 \text{ мм}$ от поверхности слитка понизится до $50 \text{ }^\circ\text{C}$.

7.21. Одна из сторон толстой асбестовой пластины, имеющей начальную температуру $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, внезапно нагрета до $T_{\text{п}} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить температуру на расстоянии $x = 10 \text{ мм}$ от поверхности через 1 ч после начала нагрева.

Коэффициент температуропроводности асбеста $a = 2,54 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

7.22. Используя условия задачи № 7.21, определить расстояние x от поверхности асбестовой пластины, на котором через $t = 10 \text{ мин}$ после начала нагрева температура повысится не более чем на 1% от ее начального значения.

7.23. Определить температуру T по оси длинного асбоцементного цилиндра радиусом $R_0 = 9,62$ см после двадцатиминутного охлаждения в среде с температурой $T_{\text{ср}} = 20$ °С по регулярному режиму. Начальная температура цилиндра $T_0 = 200$ °С. Теплофизические свойства асбоцемента: теплопроводность $\lambda = 0,26$ Вт/(м·К), теплоемкость $C_p = 0,838$ кДж/(кг·К), плотность $\rho = 1300$ кг/м³.

7.24. Цилиндрический слиток германия с начальной температурой $T_0 = 20$ °С нагревается в среде с постоянной температурой $T_{\text{ср}} = 150$ °С, обеспечивающей изменение температуры в регулярном режиме.

Определить время t нагрева слитка до температуры $T = 145$ °С. Размеры слитка: радиус $R_0 = 4,81$ см, высота $h = 31,4$ см. Теплофизические свойства германия: теплопроводность $\lambda = 60$ Вт/(м·К), теплоемкость $C_p = 0,419$ кДж/(кг·К), плотность $\rho = 5320$ кг/м³.

7.25. Испаритель с жидким четыреххлористым кремнием (радиус $R_0 = 2,405$ см, высота $h = 12,56$ см) с начальной температурой $T_0 = 25$ °С опускается в термостат с температурой $T_{\text{ср}} = 0$ °С. Через какое время t его температура будет отличаться от температуры термостата на $0,5$ °С. Теплофизические свойства четыреххлористого кремния: $\lambda = 0,12$ Вт/(м·К), $C_p = 0,85$ кДж/(кг·К), $\rho = 1500$ кг/м³.

7.26. Шамотный тигель сложной конфигурации охлаждается в регулярном режиме с темпом изменения температуры $m = 2 \cdot 10^{-4}$ 1/с.

Определить коэффициент формы тигля, если шамот обладает следующими теплофизическими свойствами: теплопроводность $\lambda = 0,25$ Вт/м·К, теплоемкость $C_p = 0,84$ кДж/(кг·К), плотность $\rho = 950$ кг/м³.

7.27. Пластина из талькохлорита толщиной $2\delta = 2$ см охлаждается в регулярном режиме в среде с температурой $T_{\text{ср}} = 0$ °С.

Определить коэффициент теплопроводности талькохлорита λ , если за 12,8 мин его температура изменилась от 400 до 300 °С.

Считать пластину неограниченной. Теплоемкость талькохлорита $C_p = 1$ кДж/(кг·К), а его плотность $\rho = 2700$ кг/м³.

7.28. Два нагретых шаровых слитка радиусом $R_0 = 10$ см, один из меди, другой из сурьмы, охлаждаются в среде, обеспечивающей коэффициент теплоотдачи $\alpha = 10$ кВт/(м²·К). Считая условием наступления регулярного режима величину $Bi > 50$, определить, для какого материала в указанных условиях справедлива теорема Кондратьева. Теплопроводности меди и сурьмы соответственно равны 420 и 15 Вт/(м·К).

7.29. Коэффициент диффузии урана в графите при 1800 °С составляет $3,14 \cdot 10^{-11}$ см²/с.

Определить количество урана, переходящее в графит через 1 см^2 поверхности за час, если диффузия происходит из источника с постоянной концентрацией урана, равной 10 мг/см^3 .

7.30. На толстой пластинке кремния создан источник бора с постоянной концентрацией 10^{21} ат/см^3 . Пластинка подвергается диффузионному отжигу в течение одного часа при $1300 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить коэффициент диффузии бора в кремнии при этой температуре, если после отжига концентрация бора на расстоянии $x = 10 \text{ мкм}$ от поверхности составляет 10^{18} ат/см^3 .

7.31. Галлий диффундирует в толстую пластинку кремния при температуре $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение трех часов. Какова концентрация галлия на расстоянии $x = 4 \text{ мкм}$ от поверхности, если коэффициент диффузии галлия в кремнии при этой температуре $D = 7 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2/\text{с}$, а поверхностная концентрация галлия поддерживается постоянной, равной 10^{18} ат/см^3 .

7.32. Фосфор диффундирует в слиток кремния из источника с постоянной концентрацией 10^{21} ат/см^3 . Определить количество атомов фосфора, проникающих в кремний через 1 см^2 поверхности за $31,4 \text{ мин}$, если диффузия происходит при температуре $1250 \text{ }^\circ\text{C}$, при которой коэффициент диффузии фосфора в кремнии $D = 1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$. Начальная концентрация фосфора в кремнии составляет 10^{20} ат/см^3 .

8. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Процессы конвективного теплообмена имеют место в потоке жидкости (или газа) и всегда протекают совместно с молекулярным теплопереносом (теплопроводностью).

В зависимости от причины, которой обусловлено движение жидкости, различают вынужденную конвекцию и свободную (или естественную).

Тепловой поток при конвективном теплообмене между жидкостью (теплоносителем) и поверхностью твердого тела (стенкой) определяется по закону Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha(T_{\text{ср}} - T_{\text{п}}), \quad (8.1)$$

где α – коэффициент теплообмена (теплоотдачи), $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$; $T_{\text{п}}$ ($T_{\text{с}}$) и $T_{\text{ср}}$ ($T_{\text{ж}}$) – температуры поверхности твердого тела (стенки) и жидкости (теплоносителя).

Основная трудность расчета конвективной теплоотдачи, с учетом уравнения (8.1), заключается в определении коэффициента α .

Во многих случаях коэффициент теплоотдачи определяют с помощью эмпирических формул, полученных путем обработки экспериментальных данных, с использованием методов, разработанных в теории подобия (см. разд. 7).

Проведенный анализ в теории подобия позволил найти решение уравнений конвективного теплообмена, представив его как уравнение подобия, где коэффициент теплообмена представлен в безразмерной форме в виде критерия Нуссельта (Nu):

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} \cdot l}{\lambda_{\text{ж}}} = f(\text{Re}_{\text{ж}}, \text{Pr}_{\text{ж}}), \quad (8.2)$$

где $\alpha_{\text{ср}}$ – среднее значение коэффициента теплоотдачи; $\text{Re} = \frac{\nu l}{\nu_{\text{ж}}}$ и

$\text{Pr}_{\text{ж}} = \frac{\nu_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}}$ – критерии Рейнольдса и Прандтля; $\lambda_{\text{ж}}, \nu_{\text{ж}}, a_{\text{ж}}$ – соответствен-

но теплопроводность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости (теплоносителя).

С использованием теории пограничного слоя было найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Так, в случае вынужденной конвекции (появление потока жидкости обусловлено действием внешних сил), с учетом анализа многочисленных опытных данных, для расчета числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи $\alpha_{\text{ср}}$ предложено следующее уравнение:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} l}{\lambda} = \text{B Re}_{\text{ж}}^n \text{Pr}_{\text{ж}}^m \text{Gr}_{\text{ж}}^{0,1} \left(\frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_{\text{с}}} \right)^{0,25}, \quad (8.3)$$

где $\text{Gr}_{\text{ж}} = \frac{g \beta_{\text{т}} \Delta T l^3}{\nu_{\text{ж}}^2}$ – критерий Грасгофа; $\beta_{\text{т}}$ – температурный коэффи-

циент объемного расширения (для газов: $\beta_{\text{т}} = \frac{1}{T}$); ΔT – температурный

напор между средой и поверхностью теплообмена.

При этом множитель $Gr_{ж}^{0,1}$ в расчетах используется только при ламинарном движении жидкости в трубах.

В табл. 8.1 приведены значения коэффициентов B , n и m в зависимости от вида движения жидкости и его гидродинамических характеристик.

Т а б л и ц а 8.1

Значения коэффициентов B , n и m в зависимости от вида движения жидкости

| Вид движения жидкости (теплоносителя) | B | n | m |
|---|-------|------|------|
| Ламинарное движение около горизонтальной пластины | 0,66 | 0,5 | 0,33 |
| Турбулентное движение около горизонтальной пластины | 0,037 | 0,8 | 0,43 |
| Ламинарное движение в трубе | 0,15 | 0,33 | 0,43 |
| Турбулентное движение в трубе | 0,021 | 0,8 | 0,43 |
| Поперечное обтекание трубы ($10 < Re_{ж} < 10^3$) | 0,5 | 0,5 | 0,38 |
| Поперечное обтекание трубы ($10^3 < Re_{ж} < 10^9$) | 0,25 | 0,6 | 0,38 |
| Поперечное обтекание коридорных пучков труб | 0,23 | 0,65 | 0,33 |
| Поперечное обтекание шахматных пучков труб | 0,41 | 0,6 | 0,33 |

В случае свободной конвекции (при движении теплоносителя за счет разности плотности нагретых и холодных объемов жидкости) расчет числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи проводится по формуле:

$$Nu_{ср} = A (Gr_{ж} Pr_{ж})^m \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_{с}} \right)^{0,25} \quad (8.4)$$

В табл. 8.2 приведены значения величин A и m для различных условий теплообмена

Значения величин A и m для различных условий теплообмена

| Вид поверхности | A | m | $Gr_{ж}Pr_{ж}$ |
|---|------|------|------------------------------|
| Горизонтальные трубы: ламинарный режим | 0,5 | 0,25 | $10^3 < Gr_{ж}Pr_{ж} < 10^8$ |
| Вертикальные трубы и плоские вертикальные поверхности: ламинарный режим | 0,76 | 0,25 | $10^3 < Gr_{ж}Pr_{ж} < 10^9$ |
| турбулентный режим | 0,15 | 0,33 | $Gr_{ж}Pr_{ж} > 10^9$ |

Если в качестве теплоносителя служит поток газа, значения критериев Прандтля $Pr_{ж}$ и Pr_c близки, поэтому в уравнениях (8.3) и (8.4) можно

принять их отношение $\left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c}\right)^{0,25} \approx 1,0$.

П Р И М Е Р Ы

1. Плоская пластина длиной $l = 2$ м и шириной $b = 1,0$ м, имеющая температуру $T_c = 50$ °С, омывается с обеих сторон продольным потоком воздуха, скорость и температура которого соответственно равны $v = 3$ м/с и $T_{ж} = 10$ °С. Физические параметры воздуха при этой температуре: $\nu = 14,16 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 2,51 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К) и $a = 20,0 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Определить средний коэффициент теплоотдачи $\alpha_{ср}$ и количество тепла Q , отдаваемое пластиной потоку воздуха за 1 с.

Р е ш е н и е.

Определяем значения критериев Прандтля, Рейнольдса и Грасгофа:

$$Pr_{ж} = \frac{\nu}{a} = \frac{14,16 \cdot 10^{-6}}{20,0 \cdot 10^{-6}} = 0,708;$$

$$Re_{ж} = \frac{vl}{\nu} = \frac{3 \cdot 2}{14,16 \cdot 10^{-6}} = 4,23 \cdot 10^5 < Re_{кр} = 5 \cdot 10^5.$$

$$Gr_{ж} = \frac{g\beta_T \Delta T l^3}{\nu^2} = \frac{9,8 \cdot 1 / 283 \cdot 40 \cdot 2^3}{14,16 \cdot 10^{-6}} = 7,83 \cdot 10^5$$

Следовательно, течение в пограничном слое можно рассматривать как ламинарное.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи определяем по формуле (8.3):

$$\alpha_{ср} = 0,66 \frac{\lambda}{l} Re_{ж}^{1/2} Pr_{ж}^{0,43} Gr_{ж}^{0,1} = 0,66 \cdot \frac{2,51 \cdot 10^{-2}}{2} \times \\ \times (4,23 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0,708^{0,43} \cdot (7,83 \cdot 10^5)^{0,1} = 70,06 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Количество тепла, передаваемого воздуху обеими сторонами пластины, за 1 с составит:

$$Q = \alpha_{ср} (T_c - T_{ж}) 2lb = 70,06 \cdot (50 - 10) \cdot 4 = 11,2 \text{ кВт}.$$

2. Температура поверхности вертикальной стенки высотой 3 м равна 10 °С. Температура воздуха в помещении 20 °С. Определить коэффициент теплоотдачи от воздуха к стенке.

Р е ш е н и е.

Теплообмен осуществляется в условиях свободной конвекции.

Определяем значение критериев $Gr_{ж}$ и $Pr_{ж}$:

$$Gr_{ж} = \frac{g\beta_T \Delta T l^3}{\nu_{ж}^2} = \frac{9,81 \cdot 10 \cdot 3^3}{293 \cdot (15,06 \cdot 10^{-6})^2} = 3,98 \cdot 10^{10};$$

$$Pr_{ж} = 0,701; Gr_{ж} \cdot Pr_{ж} = 2,79 \cdot 10^{10}.$$

Как следует из табл. 8.2, режим движения воздуха турбулентный. Определяем коэффициент теплоотдачи:

$$Nu_{ср,ж} = 0,15 (Gr_{ж} Pr_{ж})^{0,33} = 0,15 \cdot (2,79 \cdot 10^{10})^{0,33} = 423;$$

$$\alpha_{ср} = \frac{Nu_{ж} \lambda_{ж}}{h} = \frac{423 \cdot 0,02593}{3} = 3,66 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

3. Отопление помещения производится горизонтальным трубопроводом с наружным диаметром 25 мм, обогреваемым конденсирующимся паром. Температура наружной поверхности трубопровода $T_c = 104$ °С,

температура в помещении $T_{\text{ж}} = 22 \text{ }^\circ\text{C}$. Определить необходимую длину трубопровода, если расчетная мощность отопительной системы 1,5 кВт.

Р е ш е н и е.

Теплоотдача горизонтальной трубы при свободной конвекции определяется зависимостью:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,5(\text{Gr}_{\text{ж}} \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,25}.$$

Для воздуха, когда критерий Прандтля изменяется незначительно, расчет теплообмена можно производить по более простой формуле:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,47\text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25}.$$

Критерий Грасгофа определяется по температуре омывающей жидкости вдали от стенки трубы:

$$\text{Gr}_{\text{ж}} = \frac{g\beta_{\text{т}}\Delta T h^3}{\nu_{\text{ж}}^2} = \frac{9,81 \cdot 82 \cdot 0,025^3}{295 \cdot (15,15 \cdot 10^{-6})^2} = 1,86 \cdot 10^5;$$

$$\text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25} = (1,86 \cdot 10^5)^{0,25} = 20,7;$$

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,47\text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25} = 0,47 \cdot 20,7 = 9,74;$$

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ср}}\lambda_{\text{ж}}}{d} = \frac{9,74 \cdot 0,0261}{0,025} = 10,17 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Требуемая поверхность теплообмена определяется из уравнения:

$$S = \frac{Q}{\alpha_{\text{ср}}\Delta T} = \frac{1500}{10,17 \cdot 82} = 1,8 \text{ м}^2.$$

Поверхность 1 м трубы:

$$s = 3,14 \cdot 0,025 \cdot 1 = 0,0785 \text{ м}^2.$$

Необходимая длина отопительного трубопровода:

$$L = \frac{S}{s} = \frac{1,8}{0,0785} = 22,9 \text{ м}.$$

4. Определить коэффициент теплоотдачи от воды к внутренней стенке трубы диаметром 17 мм, если температура стенки $T_{\text{с}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$, а температура воды в трубе $T_{\text{ж}} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$. Скорость воды в трубе $\nu = 0,5 \text{ м/с}$.

Р е ш е н и е.

Определим критерий Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{ж}} = \frac{\nu l}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{0,5 \cdot 0,017}{0,478 \cdot 10^{-6}} = 17800 \gg \text{Re}_{\text{кр}} \cong 2300.$$

Так как режим движения турбулентный, то расчет теплообмена производится по формуле:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,021 \text{Re}_{\text{ж}}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} \left(\frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_{\text{с}}} \right)^{0,25}.$$

При $T_{\text{ж}} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$: $\text{Pr}_{\text{ж}} = 2,98$ и $\lambda_{\text{ж}} = 65,9 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, а при $T_{\text{с}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$: $\text{Pr}_{\text{с}} = 5,42$.

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,021 \cdot 17800^{0,8} \cdot (2,98)^{0,43} \cdot \left(\frac{2,98}{5,42} \right)^{0,25} = 72,6.$$

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ср}} \cdot \lambda_{\text{ж}}}{d} = \frac{72,6 \cdot 0,659}{0,017} = 2810 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

З А Д А Ч И

8.1. Плоская пластина длиной $l = 1,5 \text{ м}$ и шириной $b = 0,8 \text{ м}$ обтекается с обеих сторон продольным потоком воздуха, скорость и температура которого соответственно равны $v = 4 \text{ м/с}$, $T_{\text{ж}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура поверхности пластины $T_{\text{с}} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определить количество тепла Q отдаваемое пластиной воздуху.

Физические параметры воздуха при $20 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad a = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

8.2. Как изменится для условий задачи № 8.1 количество тепла, отдаваемое пластиной, если обтекающий ее поток воздуха направить вдоль ширины пластины ?

8.3. Во сколько раз увеличится количество тепла Q , отдаваемое пластиной воздуху, если, сохранив неизменными условия задачи № 8.1, установить впереди пластины турбулизирующую решетку, под влиянием

которой ламинарный режим течения в пограничном слое перейдет в турбулентный ?

8.4. Плоская пластина длиной $l = 1,2$ м обтекается продольным потоком воздуха со скоростью $v = 2$ м/с. Температура воздуха $T = 10$ °С.

$T_c = 50$ °С. Физические параметры воздуха при этой температуре:

$$\nu = 14,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; a = 20,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Определить средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\text{ср}}$.

8.5. Как изменится средний коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\text{ср}}$ в условиях предыдущей задачи, если скорость набегающего потока воздуха увеличить в 2,5 и 10 раз ?

Указание. Для второго случая принять, что по всей длине пластины режим течения в пограничном слое турбулентный.

8.6. Плоская пластина длиной $l = 2$ м и шириной $b = 0,8$ м омывается с обеих сторон потоком воды со скоростью $v = 2$ м/с. Температура поверхности пластины $T_c = 80$ °С, температура воды $T_{\text{ж}} = 20$ °С. Физические параметры воды при указанных температурах имеют следующие значения:

| $T, \text{ }^\circ\text{C}$ | $\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$ | $\lambda \cdot 10^2, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ | $a \cdot 10^8, \text{ м}^2/\text{с}$ |
|-----------------------------|--|--|--------------------------------------|
| 20 | 1,006 | 59,9 | 14,3 |
| 80 | 0,365 | 67,4 | 16,6 |

Полагая режим движения в пограничном слое вдоль всей пластины турбулентным, определить средний коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\text{ср}}$ и количество тепла Q , отдаваемое пластиной воде.

8.7. Вертикальный неизолированный трубопровод диаметром 76 мм и высотой 4 м омывается воздухом, средняя температура которого $T_{\text{ж}} = 20$ °С. Температура поверхности трубопровода $T_c = 60$ °С.

Определить потерю теплоты трубопроводом.

8.8. Определить потерю теплоты в окружающую среду конвективным теплообменом от горизонтального неизолированного паропровода диаметром 100 мм и длиной 25 м с температурой наружной поверхности $T_{c1} = 115$ °С, если температура воздуха $T_{\text{ж}} = 15$ °С.

Как изменится потеря теплоты трубопроводом, если его температуру снизить до $T_{c2} = 80$ °С, заменив греющий пар горячей водой ?

8.9. По трубопроводу с внутренним диаметром $d = 70$ мм проходит воздух, нагретый до температуры $T_{\text{ж}} = 100$ °С и $T_{\text{ст}} = 50$ °С. Определить значение коэффициента теплоотдачи, если скорость воздуха в трубопроводе $\nu = 4,5$ м/с. $\lambda_{\text{ж}} = 0,0321$ Вт/(м·К); $\nu_{\text{ж}} = 23,13 \cdot 10^{-6}$ м²/с. $\text{Pr}_{\text{ж}} = 0,71$.

8.10. По трубопроводу с внутренним диаметром $d_1 = 50$ мм протекает вода со скоростью $\nu = 0,8$ м/с при средней температуре $T_{\text{ж}} = 50$ °С. Температура стенки трубы $T_{\text{с}} = 65$ °С. $\text{Pr}_{\text{с}} = 3,28$.

Определить потерю теплоты с 1 м трубы.

8.11. Определить коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании воздухом трубы, диаметр которой 25 мм, если температура воздуха $T_{\text{ж}} = 20$ °С и скорость $\nu = 5$ м/с.

8.12. Змеевик из труб диаметром 10 мм омывается поперечным потоком воды со скоростью $\nu = 0,75$ м/с. Температура воды $T_{\text{ж}} = 80$ °С. Температура стенки трубы $T_{\text{с}} = 50$ °С.

Определить коэффициент теплоотдачи.

Библиографический список

1. Теория потоков: Сборник задач и примеров/ А.И. Бухбиндер, В.А. Зайцев, И.Б. Сладков, В.П. Юркинский. Л.: Изд-во ЛПИ, 1976. 87 с.
2. Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В., Величко В.И. Задачник по тепломассообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1997. 135 с.
3. Задачник по технической термодинамике и теории тепломассообмена / В.Н. Афанасьев, С.И. Исаев, И.А. Кожин и др.; Под ред. В.И. Крутова и Г.В. Петражицкого. М.: Высш. шк., 1986.
4. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. М.: Энергия, 1980.
5. Сборник задач по гидравлике / В.А. Большаков, В.Н. Попов и др.; Под ред. В.А. Большакова. Киев: Вища шк., 1975. 298 с.
6. Сборник задач по термодинамике и теплопередаче/ А.В. Болгарский, В.И. Голдобеев, Н.С. Идиатуллин, Д.Ф. Толкачев. М.: Высш. шк., 1972. 304 с.
7. Ерохин В.Г., Махонько М.Г. Сборник задач по основам теплотехники и гидравлики. М.: Энергия, 1972.
8. Сборник задач по машиностроительной гидравлике / Д.А. Бутаев, З.А. Калмыкова, Л.Г. Подвидз и др.; Под ред. И.И. Куколевского и Л.Г. Подвидза. М.: Машиностроение, 1972. 472 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

| | |
|---|----|
| Введение..... | 3 |
| 1. Законы молекулярного тепло- и массопереноса..... | 4 |
| 2. Кинематика жидкости и газа..... | 15 |
| 3. Уравнение Бернулли и его приложения..... | 23 |
| 4. Движение вязкой жидкости в трубах..... | 36 |
| 5. Теплопроводность при стационарном режиме..... | 42 |
| 6. Теория подобия..... | 53 |
| 7. Теплопроводность и диффузия при нестационарном режиме..... | 61 |
| 8. Конвективный теплообмен..... | 83 |
| Библиографический список..... | 92 |

*Юркинский Владимир Павлович
Фирсова Елена Германовна
Сладков Игорь Борисович
Зайцев Владимир Алексеевич*

ТЕПЛОТЕХНИКА

Сборник задач по тепломассообмену

Редактор *Е. А. Пряникова*
Технический редактор *А. И. Колодяжная*
Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства Политехнического университета *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2007 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005 - 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

| | | | |
|--------------------|-------------|-----------|-----------|
| Подписано в печать | Формат | 60x84/16. | |
| Усл. печ. л. | Уч.-изд. л. | Тираж | Заказ 133 |

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета, член
Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29.